

## FEUILLE DE TRAVAUX PRATIQUES # 10

L'objet de ce TP est de générer l'éroulement d'un tas de sable abélien. Si besoin, on pourra utiliser les codes disponibles [ici](#).

### 1 Tas de sable abélien

Le tas de sable est un modèle "jouet" de physique mathématique permettant d'appréhender, entre autres, des phénomènes de réactions en chaîne. On considère le graphe  $\mathbb{Z}^2$  des points du plan à coordonnées entières. Dans ce cadre, le modèle du tas de sable peut être décrit de la façon suivante. On place une pile de  $n$  grains de sable au dessus de l'origine  $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ . On a alors la règle d'éroulement suivante : si un site  $x \in \mathbb{Z}^2$  porte une pile de  $m$  grains de sable alors la pile s'éroule dès lors que  $m \geq 4$  et 4 grains sont distribués (de façon déterministe) aux 4 plus proches voisins de  $x$ . Après l'éroulement, le site  $x$  porte donc une pile de  $m - 4$  grains de sable, et chaque voisin de  $x$  a gagné un grain. On continue la procédure d'éroulement jusqu'à ce que tous les sites portent une pile de grains de sable de hauteur inférieure ou égale à 4.

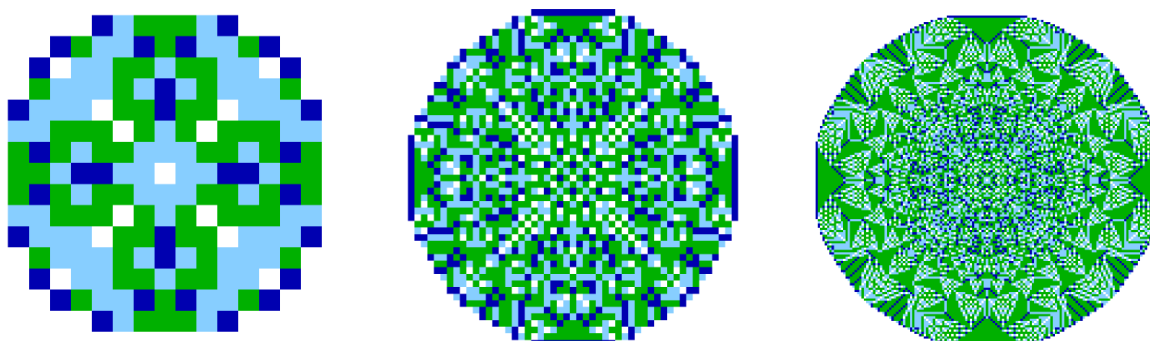


FIGURE 1 – Configuration finale du tas de sable issu de l'éroulement de  $n = 10^2, 10^3, 10^4$  grains en l'origine. Les différentes couleurs représentent les différentes hauteurs des piles.

On montre facilement que l'algorithme ci-dessus s'arrête en temps fini, i.e. après un nombre fini d'éroulements, la configuration est stable et tous les sites de  $\mathbb{Z}^2$  portent une pile de hauteur strictement plus petite que quatre. L'ensemble des sites qui possèdent au moins un grain est borné, sa taille est en grand O de  $\sqrt{n}$ . Par ailleurs, on peut montrer que la configuration finale est uniquement déterminée par la configuration initiale, en particulier la configuration finale ne dépend pas de l'ordre d'éroulement des sites, d'où le nom de tas de sable abélien.

On peut naturellement partir d'une configuration quelconque de grains puis lancer la procédure d'éroulement en rajoutant un certain nombre de grains en un site particulier. À nouveau, la configuration finale du système est alors uniquement déterminée par la configuration initiale, et le nombre de grain ajouté en le dit site. Le résultat final diffère drastiquement selon la configuration initiale comme l'illustre la comparaison de l'image de droite de la figure 1 et de la figure 2 ci-dessous.

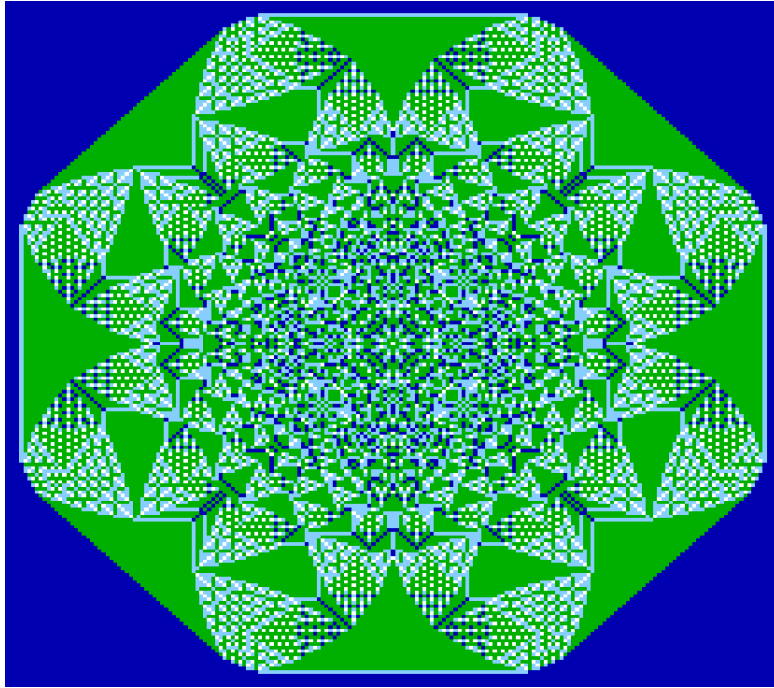


FIGURE 2 – Configuration finale du tas de sable issu de l’écroulement de  $n = 10^4$  grains à partir de la configuration initiale où il y a un grain de sable au dessus de chaque site.

Par ailleurs, on peut généraliser le modèle du tas de sable à n’importe quel graphe  $G$ , une pile de grains de sable au dessus de  $x$  s’écroulant dès que sa hauteur est supérieure ou égale au degré de  $x$  dans  $G$ , i.e. au nombre de voisins de  $x$  dans  $G$ .

**Exercice 1.** *Implémentation du modèle*

*Implémenter en Scilab la procédure d’écroulement du tas de sable dans  $\mathbb{Z}^2$ . Utiliser la commande `Matplot1` pour visualiser les hauteurs des piles. On pourra en particulier faire varier la condition initiale et observer son influence sur la condition finale.*

## 2 Dynamique markovienne sur le tas de sable

Pour comprendre le comportement du tas de sable, il est intéressant de le faire évoluer de façon dynamique/aléatoire. Par exemple, étant donnée une configuration stable, on peut ajouter un grain de sable en un site  $x$  donné de sorte que la configuration devienne instable. La pile au dessus de  $x$  s’écroule alors, entraînant potentiellement l’écroulement de voisins et donnant naissance à une “avalanche” dont la portée peut être grande.

**Exercice 2.** *Dynamique sur le tas de sable*

*À partir des différentes conditions initiales :*

1. *chaque point de la boîte  $\mathbb{Z}^2 \cap [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]^2$  porte 3 grains de sable, les autres n’en portent pas,*
2. *pour chaque sommet de  $\mathbb{Z}^2 \cap [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]^2$ , et ce de façon indépendante, on décide suivant une variable Bernoulli centrée s’il porte 0 ou 1 grain de sable,*

*implémenter en Scilab la dynamique suivante : on choisit un site au hasard uniforme parmi les sites qui portent des grains de sables, on ajoute un grain de sable sur ce site, et on lance procédure d’écroulement jusqu’à obtenir une configuration stable. On itère l’opération.*