Surfaces de l'espace euclidien

Nous rappelons ici quelques résultats concernant les surfaces de l'espace euclidien de dimension trois. Celles-ci seront vues tour à tour comme surfaces paramétrées, solutions d'équations etc. Il est important de savoir passer d'une représentation à une autre, confer le premier complément de cours sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, les immersions, submersions... On pourra par exemple consulter le bestiaire du début du chapitre 10 de [BG87] qui contient de belles figures.

1 Propriétés locales des surfaces

Comme dans le cas des courbes, on s'intéresse tout d'abord aux propriétés locales des surfaces. On commence par rappeler la notion de différentiabilité pour les applications définies sur les surfaces.

1.1 Différentiabilité sur une surface

Soit h une application définie sur une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On dit que h est différentiable si pour tout paramétrage $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'application $h \circ f$ est différentiable (vue comme brave fonction entre espace euclidien). De même que l'application $h \circ f$ a une différentielle en tout point de U, il y a une application linéaire associée à h, appelée son application linéaire tangente, en tout point de Σ. Pour tout $X \in T_p\Sigma$, il existe un unique vecteur de $\xi \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_{(u,v)}f(\xi) = X$. On vérifie alors aisément que le vecteur $D_{(u,v)}(h \circ f)(\xi)$ ne dépend pas du paramétrage f.

Définition 1 (Application tangente)**.** *On appelle application linéaire tangente de $h : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ au point $p \in \Sigma$, l'application*

$$T_p h : \begin{array}{ccc} T_p\Sigma & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & T_p h(X) = D_{(u,v)}(h \circ f)(\xi), \end{array}$$

où ξ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $D_{(u,v)}f(\xi) = X$.

1.2 Position par rapport à l'espace tangent

Dans ce paragraphe, on explicite la position d'une surface par rapport à son plan tangent lorsque celle-ci est décrite par une équation cartésienne. Soit une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ et un point $p_0 \in \Sigma$. En choisissant convenablement un système de coordonnées local, on peut supposer qu'au voisinage de p_0, la surface est décrite par une équation cartésienne $z = f(x, y)$ avec $f(0, 0) = 0$. Auquel cas, la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de p_0 s'écrit

$$f(x, y) = px + qy + \frac{1}{2}\left(rx^2 + 2sxy + qy^2\right) + o(x^2 + y^2),$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

La position de la surface par rapport à l'espace tangent est déterminée par la forme quadratique

$$Q(x, y) = rx^2 + 2sxy + qy^2.$$

— Si Q est définie, i.e. si $s^2 - rt < 0$, alors la fonction $f(x, y) - px - qy$ admet un extremum strict en zéro et la surface reste d'un côté de l'espace tangent. Le point p_0 est alors dit elliptique.
— Si Q est non dégénérée mais change de signe, i.e. $s^2 - rt > 0$ il y a des points de la surface arbitrairement proches de p_0 de part et d'autre du plan tangent. Le point p_0 est dit hyperbolique.
— si Q est dégénérée mais non nulle, i.e. $s^2 - rt = 0$ mais r, s, t sont non tous nuls, on peut supposer que $Q(x, y) = \alpha x^2$. Son graphe est un cylindre parabolique. La surface contient des points arbitrairement proche de p_0 du même côté du plan tangent que ce graphe, mais elle peut très bien en contenir également de l'autre côté. On dit que p_0 est parabolique.
— Si Q est nulle, il peut se passer à peu près n'importe quoi. Le point p_0 est dit planaire.

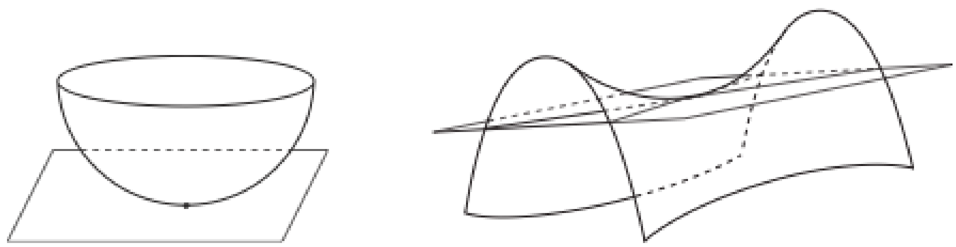

FIGURE 1 – Position par rapport au tangent dans les cas elliptique et hyperbolique [Aud06].

Exercice 1 (Exercice IX.11 p. 345 de [Aud06])**.** *Pour chacune des équations suivantes, représenter la surface et étudier sa position par rapport à son plan tangent en l'origine :*

$$z = x^2, \quad z = x^2 + y^3, \quad z = x^3, \quad z = x^4, \quad z = x^3 - 3xy^2.$$

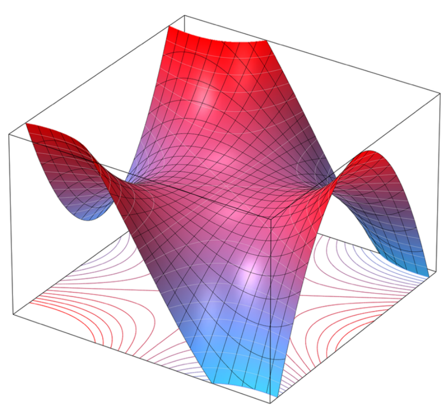

FIGURE 2 – Surface dite de la "selle de singe" d'équation $z = x^3 - 3xy^2$.

2 Les différentes courbures sur une surface

Nous nous intéressons à présent aux propriétés métriques des surfaces euclidiennes et rappelons les notions de courbures : courbures principales, courbure de Gauss, courbure moyenne etc.

2.1 Courbures principales d'une surface

Soient Σ une surface de $\mathbb{R}^3$, p un point de Σ et $n(p)$ un vecteur directeur de la normale à $T_p\Sigma$ au point p. Si $X \in T_p\Sigma$ est un vecteur unitaire, on note alors P_X le plan engendré par X et $n(p)$. L'intersection de P_X et Σ est une courbe plane qui, comme nous l'avons vu dans la leçon précédente, possède une courbure algébrique au point p, notée ici $K_X(p)$. Remarquons que $K_X(p) = K_{-X}(p)$.

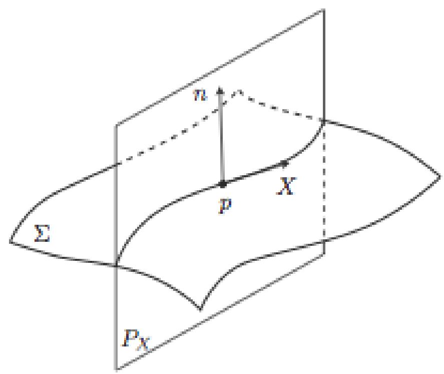

FIGURE 3 – Courbe obtenue comme intersection d'une surface et d'un plan normal [Aud06].

Exercice 2. *Quelles sont les courbures $K_X(p)$ lorsque X décrit l'espace tangent unitaire au pôle nord de la sphère euclidienne $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$? Même question pour la base de l'hyperboloïde à une nappe d'équation $\{z > 0\} \cap \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.*

Théorème 1 (Euler, théorème IX.3.1 p. 332 de [Aud06])**.** *Si tous les $K_X(p)$ ne sont pas égaux lorsque X varie, il existe une unique direction, representée par un vecteur unitaire $X_1 \in T_p\Sigma$, pour laquelle $K_X(p)$ est minimale. De même, il existe une unique direction, representée par un vecteur unitaire $X_2 \in T_p\Sigma$, pour laquelle $K_X(p)$ est maximale. Si X fait un angle θ avec X_1, on a alors*

$$K_X(p) = K_{X_1}(p)\cos(\theta)^2 + K_{X_2}(p)\sin(\theta)^2.$$

Définition 2. *Si $p \in \Sigma$, les courbures $K_{X_1}(p)$ et $K_{X_2}(p)$ sont appelées courbures principales au point p et les directions sont appelées directions de courbure principales.*

Définition 3. *On appelle courbure de Gauss au point p et on note $K(p)$ le produit des courbures principales $K(p) := K_{X_1}(p)K_{X_2}(p)$.*

Définition 4. *On appelle courbure moyenne au point de p et on note $K_m(p)$ la moyenne arithmétique des courbures principales :*

$$K_m(p) := \frac{K_{X_1}(p) + K_{X_2}(p)}{2}.$$

2.2 Les formes fondamentales d'une surface

Nous rappelons les notions de première et seconde formes fondamentales et leur liens avec les courbures introduites plus haut.

2.2.1 Première forme fondamentale

Les surfaces Σ considérées ici sont des sous-variétés de dimension deux de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. En particulier, en tout point $p \in \Sigma$, l'espace tangent $T_p\Sigma$ peut être vu comme un plan de $\mathbb{R}^3$ dont il hérite la structure métrique. La forme quadratique euclidienne, restreinte à $T_p\Sigma$ s'appelle la première fondamentale en $p \in \Sigma$, on la note I_p. Autrement dit,

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in T_p\Sigma,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. Si la surface Σ est représentée localement par une immersion $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$, alors la première forme fondamentale est donnée par

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

où

$$E = \left|\left|\frac{\partial \phi}{\partial u}\right|\right|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left|\left|\frac{\partial \phi}{\partial u}\right|\right|^2.$$

Exercice 3 (Exemples p. 419 de [BG87]). *Montrer que si la surface Σ est donnée par une équation cartésienne du type $z = f(x, y)$, alors la première forme fondamentale est donnée par*

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2,$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dans le cas où Σ est une surface de révolution i.e. $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, montrer que la première forme fondamentale est donnée en coordonnées polaires par $ds^2 = (1 + f'^2)dr^2 + r^2 d\theta^2$.

2.2.2 Seconde forme fondamentale

Soit Σ une surface paramétrée par (U, f) et $p \in \Sigma$. On appelle vecteur normal au point p, noté $n(p)$ le vecteur unitaire

$$n(p) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{||\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}||}.$$

On obtient ainsi une application $n : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Définition 5. *L'application linéaire tangente $T_pn : T_p\Sigma \to \mathbb{R}^3$ est appelée application de Gauss.*

Comme $||n(p)|| = 1$, on a $T_pn(X).n(p) = 0$ pour tout vecteur tangent $X \in T_p\Sigma$. Donc T_pn est à valeurs dans l'espace tangent à la sphère. Les espaces tangents $T_p\Sigma$ et $T_{n(p)}\mathbb{S}^2$ sont les mêmes (plan orthogonaux à $n(p)$, aussi l'application linéaire tangente peut être vue comme un endomophisme de $T_p\Sigma$. La courbure de Gauss $K(p)$ n'est autre que son déterminant. L'interprétation de la courbure de Gauss est donc la suivante : si (v_p, w_p) est une base orthodnormée de $T_p\Sigma$, l'application linéaire tangente envoie (v_p, w_p) sur un couple de vecteur (v'_p, w'_p) de $T_{n(p)}\mathbb{S}^2$, la courbure de Gauss est l'aire orientée du parallélogramme associé à (v'_p, w'_p) (voir figure ci-après).

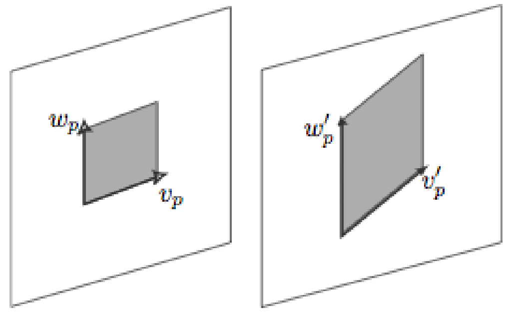

FIGURE 4 – Interprétation géométrique de la courbure de Gauss [Aud06].

Définition 6. *On appelle deuxième forme fondamentale au point $p \in \Sigma$, et on note II_p, la forme bilinéaire (symétrique)*

$$\mathrm{II}_p(X, Y) := -\langle T_p n(X), Y \rangle.$$

Si la surface Σ est représentée localement par une immersion $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$, alors la première forme fondamentale est donnée par

$$ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

où

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, n \right\rangle, \quad M = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, n \right\rangle, \quad N = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, n \right\rangle.$$

Proposition 1. *Soit γ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur la surface Σ. Soit $X = \gamma'(0) \in T_p\Sigma$ son vecteur tangent en p. Alors*

$$\mathrm{II}_p(X, X) = \langle \gamma''(0), n(p) \rangle.$$

En particulier, par définition de la courbure d'une courbe plane, $\mathrm{II}_p(X, X)$ est la courbure K_X de la courbe découpée par le plan engendré par $n(p)$ et X, i.e. la courbure introduite dans la section 2.1. Il existe une base orthonormée (X_1, X_2) du tangent $T_p\Sigma$ dans laquelle la seconde forme fondamentale est diagonalisée, auquel cas on a pour $i = 1, 2$:

$$\mathrm{II}_p(X_i, X_i) = K_{X_i}.$$

Comme ces vecteurs forment une base orthogonale, on a alors

$$\mathrm{II}_p(\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2) = K_{X_1}\cos(\theta)^2 + K_{X_2}\sin(\theta)^2.$$

Remarquons que si les courbures K_{X_1} et K_{X_2} sont disctinctes, i.e. si II_p n'est pas proportionelle au produit scalaire euclidien, elles sont effectivement les extrema de $X \mapsto K_X$. Toujours dans le cas où la surface Σ est représentée localement par une immersion $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$, en terme de la première et seconde forme fondamentale, les courbures gaussienne et moyenne sont données par

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad K_m = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

Les courbures principales sont quant à elles les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 4 (Appendice IX.4 p. 341 de [Aud06]). *Soit* Σ *une surface de* $\mathbb{R}^3$ *solution d'une équation :*

$$\Sigma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ F(x_1, x_2, x_3) = 0\right\}.$$

Montrer que la seconde forme fondamentale s'écrit alors

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = -\frac{1}{||\nabla_p F||} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i \partial_j F(p) X_i X_j.$$

Exercice 5 (Exercice 8.1.1 p.185 de [Pre10]). *Soit* Σ *une surface de* $\mathbb{R}^3$ *donnée par une équation cartésienne* $z = f(x, y)$*. Montrer que les courbures de Gauss et moyennes sont données par*

$$K(x, y) = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \qquad K_m(x, y) = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

Exercice 6 (Exercices 8.1.2 et 8.2.1 de [Pre10]). *Calculer les courbures principales, moyenne et gaussienne de l'hélicoïde paramétrée par* $(u, v) \mapsto (v \cos(u), v \sin(u), \lambda u)$.

Exercice 7 (Exercice IX.17 p. 346 de [Aud06]). *On considère une coourbe plane paramétrée par la longeur d'arc et on la fait tourner autour d'une droite de son plan qu'elle ne recontre pas, obtenant ainsi une surface paramétrée par*

$$(s, \theta) \longmapsto (g(s) \cos(\theta), g(s) \sin(\theta), h(s)), \quad \textit{avec } g'^2 + h'^2 = 1.$$

Montrer que la courbure de Gauss au point de paramètre (s, θ) *vaut alors*

$$K(s, \theta) = -\frac{g''(s)}{g(s)}.$$

On suppose maintenant que la courbure est constante.

1. *Montrer que si* K *est nulle, la surface est un plan, un cylindre ou un cône.*
2. *Si* $K > 0$*, écrire la solution générale* $(g(s), h(s))$ *et vérifier que les sphères sont des solutions.*
3. *Si* $K < 0$*, écrire la solution générale* $(g(s), h(s))$*. Dessiner la surface obtenue pour*

$$g(s) = e^s, \quad h(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

3 Ce dont on aurait pu parler

La théorie des surfaces de l'espace euclidien est infiniment riche, nous n'avons fait que l'effleurer. En particulier nous n'avons pas abordé les propriétés globales des surfaces, par exemple la classification des surfaces connexes compactes par leur genre, le théorème de Gauss-Bonnet etc. On aurait aussi pu évoquer les géodésiques des surfaces, les applications conformes entre les surfaces, la notion de transport parallèle etc.

Références

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie.* EDP Sciences, 2006.

[BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces.* PUF, 1987.

[Pre10] Andrew Pressley. *Elementary differential geometry.* Springer, 2010.