

## COURBES DE L'ESPACE EUCLIDIEN

Nous rappelons ici quelques résultats concernant les courbes de l'espace euclidien. Celles-ci seront tout à tour vues comme des courbes paramétrées, c'est-à-dire images d'applications  $t \mapsto f(t)$  d'un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ou comme solutions d'équations. Il est important de savoir passer d'une représentation à l'autre. On s'intéressera tout d'abord aux propriétés locales des courbes puis à leurs propriétés globales.

### 1 Propriétés locales

Dans toute la suite  $I$  désignera un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1** (Abscisse curviligne ou longueur d'arc, proposition VIII.4.3 p. 305 de [Aud06]).  
*Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière de classe  $C^1$ . On fixe un point  $t_0 \in I$  et on définit, pour tout  $t \in I$ ,*

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

*Alors  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $I$  sur son image  $J = \varphi(I)$ . L'application  $g := f \circ \varphi^{-1}$  est un paramétrage de la même courbe qui vérifie  $\|g'(s)\| = 1$  pour tout  $s \in J$ . On dit alors que la courbe est paramétrée par la longueur d'arc ou abscisse curviligne.*

*Démonstration.* La courbe étant supposée régulière, le vecteur  $f'(t)$  ne s'annule pas sur  $I$  et comme la norme  $x \mapsto \|x\|$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$ . La norme de la dérivée  $\|f'(t)\|$  est strictement positive pour tout  $t$ . La fonction  $\varphi$  est donc strictement croissante et admet une fonction réciproque elle aussi de classe  $C^1$ . Le vecteur dérivé de la composée  $g$  est

$$g'(s) = f' \circ \varphi^{-1}(s)(\varphi^{-1})'(s) = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(s)} = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\|f' \circ \varphi^{-1}(s)\|},$$

qui est bien unitaire. □

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe régulière de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ , alors son développement de Taylor au voisinage d'un point  $t_0 \in I$  est de la forme

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si  $f'(t_0)$  et  $f''(t_0)$  sont deux vecteurs indépendants, la courbe est située, au voisinage de  $t_0$ , d'un seul côté de sa tangente : elle est contenue dans le demi-plan défini par sa tangente et contenant  $f''(t_0)$ . Si les vecteurs  $f'(t_0)$  et  $f''(t_0)$  sont colinéaires et  $k \geq 3$ , et si par exemple  $f'''(t_0)$  est indépendant de  $f'(t_0)$ , on a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)(1 + \lambda(t - t_0))f'(t_0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 f'''(t_0) + o((t - t_0)^3)$$

de sorte que la courbe traverse sa tangente, i.e. on est en présence d'un point d'inflexion.

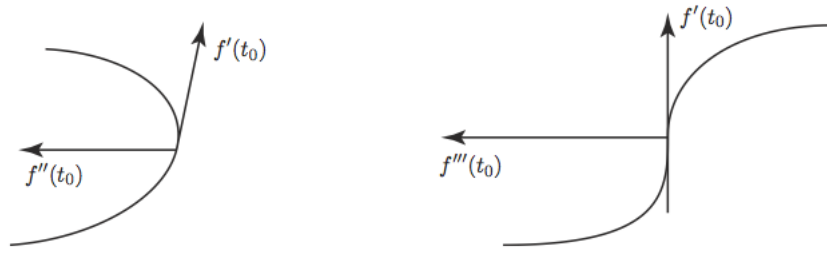


FIGURE 1 – Position d'une courbe par rapport à sa tangente [Aud06].

## 1.1 Courbes planes

On considère ici une courbe plane  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétrée par la longueur d'arc  $s$ . On note  $\tau(s) := f'(s)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $s$ . Soit  $n(s)$  l'unique vecteur unitaire tel que le couple  $(\tau(s), n(s))$  soit une base orthonormée directe du plan. Le vecteur  $n(s)$  est appelé le vecteur normal à la courbe au point  $f(s)$ .

En dérivant la relation  $\|\tau(s)\|^2 = 1$ , on obtient  $\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0$ . Autrement dit, le vecteur  $\tau'(s)$  est orthogonal à  $\tau(s)$  i.e. il est colinéaire à  $n(s)$ . Il existe donc un scalaire  $\kappa(s)$ , appelé courbure algébrique, tel que

$$\tau'(s) = \kappa(s) n(s).$$

Le signe de la courbure algébrique dépend de l'orientation du plan et de celle donnée sur la courbe par l'abscisse curviligne. En dérivant cette fois la relation d'orthogonalité  $\tau(s) \cdot n(s) = 0$ , il vient  $\tau'(s) \cdot n(s) + \tau(s) \cdot n'(s) = 0$  et comme  $\|n(s)\|^2 = 1$ , on voit de même que  $n'(s)$  est colinéaire à  $\tau(s)$  et donc que

$$n'(s) = -\kappa(s) \tau(s).$$

**Interprétation :** la courbure  $\kappa(s)$  est positive quand la courbe est située dans le demi-plan défini par la tangente et contenant  $n(s)$  i.e. quand la courbe “tourne à gauche”. La courbure s'annule lorsque  $\tau'(s) = 0$ , en particulier lorsque la courbe a un point d'inflexion.

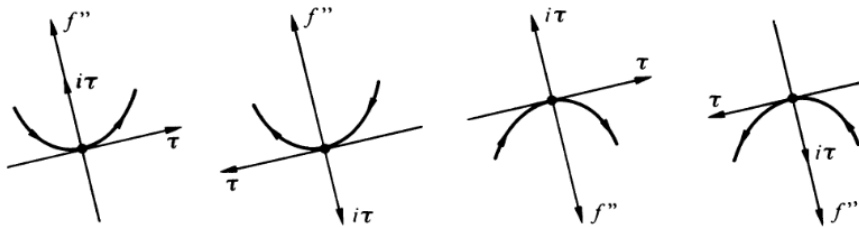


FIGURE 2 – Signe de la courbure algébrique,  $\kappa > 0, \kappa < 0, \kappa < 0, \kappa > 0$  respectivement [BG87].

La valeur absolue  $|\kappa(s)|$  de la courbure algébrique est appelée courbure (“tout court”), on a naturellement

$$|\kappa(s)| = \|\tau'(s)\| = \|f''(s)\|.$$

L'inverse  $\rho(s) = 1/\kappa(s)$  est appelé rayon de courbure et le point  $C(s) := f(s) + \rho(s)n(s)$  est appelé centre de courbure. Le cercle de centre  $C(s)$  est de rayon  $|\rho(s)|$  est appelé cercle osculateur de la courbe en  $f(s)$ .

**Proposition 2** (Développée, proposition VIII.3.1 p. 301 de [Aud06]). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de classe  $C^3$  d'une courbe plane. On suppose que la courbure ne s'annule pas sur  $I$ . On désigne  $D_t$  la droite normale à la courbe au point de paramètre  $f(t)$ . Alors l'enveloppe de la famille des droites  $(D_t)_{t \in I}$  est l'ensemble des centres de courbure.

On renvoie au chapitre VIII de [Aud06] pour de nombreux exercices sur les courbes et les notions d'enveloppe et développée. Le théorème fondamental suivant affirme qu'une courbe plane est essentiellement caractérisée par sa courbure.

**Théorème 1** (Théorème 8.5.7 p 333 de [BG87]). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant zéro,  $c$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $a, b$  deux points du plan avec  $\|b\| = 1$ . Alors, il existe un unique arc géométrique  $\Gamma$  du plan ayant pour paramétrisation  $(I, f)$  tel que  $f(0) = a$ ,  $f'(0) = b$ ,  $\|f'(s)\| = 1$  et  $\kappa(s) = c(s)$  pour tout  $s \in I$ . Autrement dit, une courbe plane est déterminée, à déplacement près, par sa courbure algébrique.

*Démonstration.* Soit  $(I, f)$  une solution,  $\tau := f' \in C^1(I, \mathbb{S}^1)$  et  $\bar{\tau} \in C^1(I, \mathbb{R})$  un relèvement. On doit avoir  $d\bar{\tau}/ds = c$  autrement dit

$$\bar{\tau}(s) = \tau(0) + \int_0^s c(u)du = b + \int_0^s c(u)du.$$

Ceci définit  $\bar{\tau}$  de façon unique, puis  $\tau$  par projection et enfin  $f$  par intégration. □

**Exemple 1** (Exemple 2.2.8 p. 42 de [Pre10]). La courbe  $\gamma$  paramétrée par la longueur d'arc, passant par l'origine et de vecteur dérivée  $(1, 0)$  en zéro, et dont la courbure algébrique est prescrite, égale à  $c(s) = s$ , est donnée par

$$\gamma(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{2}\right) du, \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du \right).$$

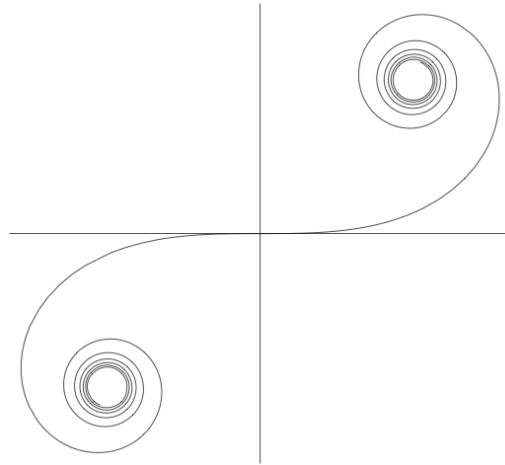


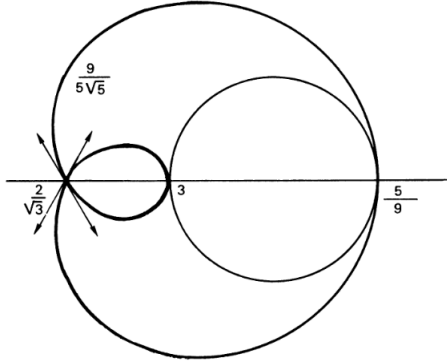
FIGURE 3 – Courbe plane de courbure algébrique  $\kappa(s) = s$  [Pre10].

Lorsqu'une courbe n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, mais par une paramétrisation "quelconque" disons  $(I, g)$ , alors la courbure au point  $g(t) = (x(t), y(t))$  s'exprime sous la forme

$$|\kappa(t)| = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{|x'(t)^2 + y'(t)^2|^{3/2}}.$$

**Exercice 1** (exercice 8.4.14.1 p. 329 de [BG87]). Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\Gamma$  le cercle de centre  $a \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $r$ . Montrer que sa courbure est constante égale à  $1/r$ .

**Exercice 2** (exercice 8.4.14.2 p. 329 de [BG87]).



Soit  $\Gamma$  une courbe du plan paramétrée par  $g(t) = r(t)e^{it}$ . Montrer que la courbure au point  $g(t)$  est alors donnée par

$$|\kappa(t)| = \frac{|r(t)^2 + 2r'(t) - 2r(t)r''(t)|}{(r(t)^2 + r'(t)^2)^{3/2}}.$$

Expliciter cette courbure lorsque la courbe  $\Gamma$  est le limaçon de Pascal qui correspond au choix  $r(t) = 1 + 2\cos(t)$ .

## 1.2 Courbes dans l'espace

On considère maintenant une courbe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  toujours paramétrée par la longueur d'arc  $s$ , de classe  $C^k$  avec  $k \geq 3$ . Comme plus haut, on note  $\tau(s) := f'(s)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $s$ . On suppose que la courbe est birégulière, c'est-à-dire que  $\tau$  et  $\tau'$  ne s'annulent pas sur  $I$ . On désigne par  $n(s)$  le vecteur unitaire normal principal et par  $\beta(s)$  le vecteur binormal

$$n(s) := \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}, \quad \beta(s) := \tau(s) \wedge n(s).$$

Comme dans le cas plan, en dérivant les relations  $\|\beta(s)\|^2 = 1$  et  $\beta(s) \cdot \tau(s) = 0$ , on obtient que  $\beta(s)$  est colinéaire à  $n(s)$ , de sorte qu'il existe un scalaire  $t(s)$ , appelé torsion, tel que

$$\beta'(s) = t(s)n(s).$$

On obtient finalement, en dérivant les relations  $\|n(s)\|^2 = 1$  et  $n(s) \cdot \tau(s) = n(s) \cdot \beta(s) = 0$  que

$$n'(s) \cdot n(s) = 0, \quad n'(s) \cdot \tau(s) = -n(s) \cdot \tau'(s) = -\kappa(s), \quad n'(s) \cdot \beta(s) = -n(s) \cdot \beta'(s) = -t(s).$$

Ce sont les formules de Frenet et le trièdre  $(\tau(s), n(s), \beta(s))$  est appelé le trièdre de Frenet au point  $f(s)$  de la courbe.

**Interprétation :** par définition,  $\beta(s)$  est orthogonal au plan osculateur  $\text{vect}(\tau(s), n(s))$ . Ainsi  $\beta'(s)$  indique combien tourne ce plan osculateur en fonction de l'abscisse curviligne. La torsion mesure donc la défaut de planéité de la courbe. En particulier, elle est nulle si la courbe est plane. Réciproquement, si la torsion est nulle le vecteur  $\beta(s) = \tau(s) \wedge n(s)$  est constant i.e.  $\tau(s)$  est perpendiculaire à un vecteur constant et la courbe est plane.

Lorsqu'une courbe n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, mais par une paramétrisation "quelconque" disons  $(I, g)$ , alors la torsion au point  $g(u)$  s'exprime sous la forme

$$t(u) = \frac{(g'(u), g''(u), g'''(u))}{\|g'(u) \wedge g''(u)\|^2},$$

où  $(x_1, x_2, x_3)$  désigne le produit mixte  $\sqrt{\det(x_i \cdot x_j)}$ .

**Exercice 3** (Exemple 8.6.11.1 p. 337 de [BG87], exercice VIII.20 de [Aud06]). On considère l'hélice circulaire  $\Gamma(a, k)$  paramétrée par  $g(u) = (a \cos(u), a \sin(u), ku)$ . Montrer que la courbure et la torsion sont constantes données par

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + k^2}, \quad t = -\frac{k}{a^2 + k^2}.$$

Comme dans le cas plan, on montre que les courbes suffisamment régulières de l'espace euclidien de dimension 3 sont essentiellement caractérisées par leur courbure et leur torsion.

**Théorème 2** (Théorème 8.6.13 p 339 de [BG87]). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant zéro,  $c$  une fonction  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $d$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $u, v, w$  trois points de l'espace avec  $\|v\| = \|w\| = 1$ . Alors, il existe un unique arc géométrique  $\Gamma$  de l'espace ayant pour paramétrisation  $(I, f)$  tel que  $f(0) = u$ ,  $f'(0) = v$ ,  $f''(0)/\|f''(0)\| = w$ ,  $\|f'(s)\| = 1$ ,  $\kappa(s) = c(s)$  et  $t(s) = d(s)$  pour tout  $s \in I$ .

**Remarque 1.** Comme on peut s'en douter, les théorèmes 1 et 2 admettent une généralisation naturelle pour les courbes suffisamment régulières à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Moralement, il existe une unique courbe paramétrée par la longueur d'arc dont les "courbures" sont prescrites. On pourra par exemple consulter la très belle leçon 2 et le théorème 1 p. 39 de [Pos90].

## 2 Propriétés globales

On s'intéresse maintenant aux propriétés globales des courbes tracées dans l'espace euclidien. Commençons par énoncer le résultat fondamental suivant

**Théorème 3** (Classification des variétés de dimension 1). Soit  $M$  une variété connexe de dimension 1. Alors  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$  si elle est compacte, à  $\mathbb{R}$  si elle n'est pas compacte

Selon les références, la preuve du théorème peut-être plus ou moins longue et plus ou moins délicate. Il faut en être conscient avant d'en faire ou non un développement. De bonnes références sont le théorème 55 p. 114 de [Laf96] ou encore le Théorème 3.4.1 p. 127 de [BG87].

### 2.1 Autour du théorème de Jordan

Parmi les propriétés globales de courbes planes, la plus fondamentale est sans doute le théorème de Jordan. On l'énonce ici pour une courbe de classe  $C^2$  mais le résultat est vrai si on suppose seulement que la courbe est continue.

**Théorème 4** (Théorème de Jordan, Théorème 9.2.1 p. 357 de [BG87]). Soit  $C$  une courbe fermée simple de classe  $C^2$  du plan. Alors son complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a exactement deux composantes connexes,  $C_{int}$  et  $C_{ext}$ , telles que  $\overline{C}_{int}$  et  $\overline{C}_{ext}$  sont de frontière commune

$$\partial \overline{C}_{int} = \partial \overline{C}_{ext} = C.$$

Les deux composantes se distinguent de la façon suivante :  $\overline{C}_{int}$  est compacte,  $\overline{C}_{ext}$  est non bornée.

**Remarque 2.** Il existe de nombreuses approches pour la démonstration du théorème de Jordan, par exemple via le théorème du point fixe de Brouwer, via approximation polygonale etc. Ces preuves restent le plus souvent assez délicates de sorte qu'il est déconseillé de les envisager comme développement.

**Exercice 4** (Les trois maisons, non planarité de  $K_{3,3}$ ). Dans un hameau se trouvent trois maisons que l'on veut raccorder aux trois réseaux d'eau, de gaz et d'électricité. Montrer que ceci n'est pas possible sans superposition d'au moins deux conduites.

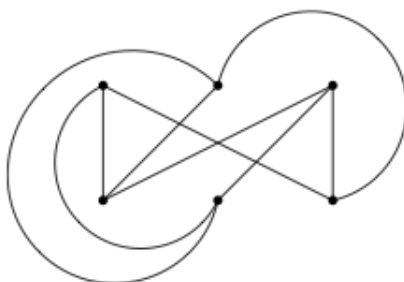


FIGURE 4 – Le graphe  $K_{3,3}$  correspondant au problème des trois maisons.

Le théorème de Jordan permet de montrer que le graphe  $K_{3,3}$  n'est pas planaire. Une preuve alternative serait d'utiliser la formule d'Euler. Grâce à cette dernière, on peut en effet montrer que les graphes  $K_{3,3}$  et  $K_5$  ne sont pas planaires. Il est facile d'en déduire que tout graphe qui contiendrait une subdivision de l'un des ces deux graphes comme sous-graphe n'est pas non plus planaire. Le théorème de Kuratowski affirme que la réciproque est vraie. On pourra en trouver une preuve p. 159 de [BFH12].

**Théorème 5** (Kuratowski, 1930). *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de  $K_{3,3}$  ou  $K_5$ .*

## 2.2 Isopérimétrie

L'inégalité isopérimétrique est un grand classique de l'agrégation. Les preuves les plus classiques utilisent l'analyse de Fourier, la formule de Stokes, etc. Attention d'être bien au clair avec tous les ingrédients des démonstrations si vous choisissez l'inégalité comme développement.

**Théorème 6** (Inégalité isopérimétrique, théorème 9.3.1 p. 363 de [BG87], théorème VI.3 p.103 de [QZ13]). *Pour toute courbe fermée simple  $C$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , du plan euclidien, on a*

$$\text{long}(C) \geq 4\pi \text{aire}(C_{\text{int}}),$$

*avec égalité si et seulement si la courbe  $C$  est un cercle.*

**Exercice 5** (Exercice p. de [Pre10]). *En appliquant l'inégalité isopérimétrique à l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

*établir l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \cos(t)^2 + q^2 \sin(t)^2} dt \geq 2\pi \sqrt{pq}.$$

*Quand a-t-on égalité ?*

## 2.3 Nombre de sommets d'une courbe plane

On appelle sommet d'une courbe plane paramétrée  $(I, f)$  tout point  $f(t_0)$  correspondant à un point critique de la courbure algébrique, c'est-à-dire

$$\left. \frac{d\kappa(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du paramétrage de la courbe.

**Exemple 2** (Exemple 3.3.2 p 63 de [Pre10]). *Dans le plan, on considère l'ellipse paramétrée par  $f(t) = (p \cos(t), q \sin(t))$ . Sa courbure algébrique est donnée par*

$$\kappa(t) = \frac{pq}{(p^2 \sin(t)^2 + q^2 \cos(t)^2)^{3/2}},$$

de sorte que

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{3pq(q^2 - p^2) \sin(t) \cos(t)}{(p^2 \sin(t)^2 + q^2 \cos(t)^2)^{5/2}}.$$

La dérivée s'annule donc aux points tels que  $t = 0, \pi/2, \pi$  et  $3\pi/2$ , i.e. l'ellipse a quatre sommets.

Le théorème suivant montre qu'une courbe fermée simple convexe dans le plan a toujours au moins 4 sommets. L'hypothèse de convexité n'est pas nécessaire mais la preuve est alors bien plus délicate. Le cas où la courbure est partout strictement positive est par exemple traité dans [FGN12] p. 335.

**Théorème 7** (des quatre sommets, théorème 3.3.3 p 63 de [Pre10]). *Soit  $C$  une courbe fermée simple convexe, alors  $C$  possède au moins quatre sommets.*

**Exercice 6** (Exercice 3.3.2 p. 65 de [Pre10]). *Déterminer le nombre de sommets du limaçon de l'exercice 2 paramétré par  $f(t) = (1 + 2 \cos(t))(\cos(t), \sin(t))$ .*

## 2.4 Umlaufsatz

Cette section est consacrée à quelques résultats concernant le nombre d'enroulement des courbes fermées planes. Une excellente référence est le chapitre 9 de [BG87]. Soit  $C$  une courbe orientée fermée du plan euclidien orienté. Si la courbe  $C$  est représentée par  $(\mathbb{S}^1, f)$ , alors l'application tangente unitaire

$$\tau_f : t \mapsto \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

est une application continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Elle possède donc un degré que l'on note  $\deg \tau_f$ . On vérifie que si  $(\mathbb{S}^1, g)$  est une autre représentation, alors  $\deg \tau_f = \deg \tau_g$ .

**Définition 1.** *Le degré de l'application linéaire tangente  $\tau_f$ , qui ne dépend pas de la représentation  $(\mathbb{S}^1, f)$  de la courbe  $C$ , est appelé enroulement de la courbe et noté  $W(C)$ .*

**Définition 2.** *Deux courbes fermées  $C$  et  $D$  du plan, de classe  $C^1$ , sont dites homotopes s'il existe une homotopie  $F \in C([0, 1] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  l'application  $F(t, \cdot) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  soit une immersion de classe  $C^1$  et  $F(0, \cdot) = C, F(1, \cdot) = D$ .*

**Proposition 3.** *Si  $C$  et  $D$ , deux courbes fermées orientées du plan, sont homotopes alors elles ont même nombre d'enroulements  $W(C) = W(D)$ .*

**Théorème 8** (Whitney-Grauert, théorème 9.4.8 p.368 de [BG87]). *Soient  $C$  et  $D$  deux courbes fermées orientées du plan telles que  $W(C) = W(D)$ . Alors  $C$  et  $D$  sont homotopes.*

**Théorème 9** (Gauss-Bonnet unidimensionnel). *Soit  $C$  une courbe fermée et  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  une paramétrisation, de période  $\ell$  égale à la longueur de la courbe  $C$ , alors on a*

$$\int_0^\ell \kappa(s) ds = 2\pi W(C).$$

*En particulier, on obtient que le membre de gauche, appelé courbure totale, est invariant par homotopie.*

**Théorème 10.** *Soit  $C$  une courbe fermée simple. On a alors  $W(C) = \pm 1$ . En particulier, si la courbe  $C$  est orientée, on a  $W(C) = 1$ .*

**Corollaire 1.** *Si  $C$  une courbe fermée simple orientée, sa courbure totale est égale à  $2\pi$ .*

### 3 Ce dont on aurait pu parler

Il y a beaucoup à dire sur les courbes tracées dans l'espace euclidien et ce qui précède n'en est qu'un bref aperçu. Voici quelques idées sous forme de liste non exhaustive.

1. Les courbes classiques qui apparaissent en mécanique ou en optique.
2. Les courbes de Bézier et leur propriétés d'interpolation.
3. Les courbes qui remplissent le plan, par exemple la courbe de Peano.
4. Les courbes fractales et leur dimension, par exemple le flocon de Von Koch.
5. Le mouvement brownien (vu comme limite d'échelle de marches aléatoires) qui permet de répondre à la question, comment choisir une fonction  $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  au hasard ?
6. Le théorème de Riemann sur les applications conformes en lien avec le théorème de Jordan.
7. Les évolutions de Loewner ou comment coder une courbe complexe par une fonction réelle.

### Références

- [Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [BFH12] Alain Bretto, Alain Faisant, and François Hennecart. *Éléments de théorie des graphes*. Springer, 2012.
- [BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces*. PUF, 1987.
- [FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.
- [Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentiables*. EDP Sciences, 1996.
- [Pos90] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, Variétés différentiables*. Mir, 1990.
- [Pre10] Andrew Pressley. *Elementary differential geometry*. Springer, 2010.
- [QZ13] Hervé Queffelec and Claude Zuilly. *Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques*. Dunod, 2013.