Université de Rennes 1
Jürgen Angst

Préparation à l'agrégation
année 2014-2015

Éléments de calcul différentiel

1 Rappels de calcul différentiels

On commence par rappeler les prérequis indispensables de calcul différentiel, prérequis que l'on pourra retrouver par exemple dans [Laf96] ou [Rou03].

1.1 Rappels et notations

Définition 1 (Différentielle d'une application). *Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit U un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est différentiable au point $x \in U$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$||f(x+h) - f(x) - L(h)||_F = o\left(||h||_E\right).$$

Auquel cas, l'application L est unique, on parle de différentielle de f en x et on la note $D_x f$.

Proposition 1 (Différentielle et composition). *Soient $(E, ||\cdot||_E)$, $(F, ||\cdot||_F)$, $(G, ||\cdot||_G)$ des espaces normés et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications différentiables aux points $x \in E$ et $f(x) \in F$. Alors, l'application $g \circ f : E \to G$ est différentiable et sa différentielle est donnée par*

$$D_x(g \circ f) = D_{f(x)} g \circ D_x f$$

Définition 2 (Continue différentiabilité). *L'application $f : U \to F$ est dite de classe C^1 sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$ et si l'application $x \mapsto D_x f$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$ (matrice à une ligne et n colonnes). La différentielle $D_x f$ est alors une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. L'espace E étant muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d'après le théorème de représentation de Riesz, cette forme s'identifie à un vecteur.

Définition 3 (Gradient). *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en x, alors il existe un unique vecteur noté $\mathrm{grad}\, f(x)$ ou encore $\nabla_x f$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad D_x f(h) = \langle \nabla_x f,\, h \rangle.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, et si $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1), \ldots, x_n))$, la différentielle $D_x f$ est l'application linéaire définie, dans les bases canoniques de $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, par la *matrice jacobienne*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $n = p$, la différentielle $D_x f$ est alors inversible si et seulement si son *jacobien* $\det(J)$ est non nul.

Définition 4 (Divergence d'un champ de vecteur)**.** *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable, la divergence* $\operatorname{div} f(x)$ *de f en x est la trace de la différentielle $D_x f$:*

$$\operatorname{div} f(x) := \operatorname{tr} D_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

1.2 Interprétation

Il est primordial d'avoir une vision claire et concrète des notions ci-dessus. Outre les interprétations données plus bas, il est important de savoir sur quels espaces sont définies les différentielles d'ordre 1 ou d'ordres supérieurs, dans quels espaces elles sont à valeurs etc.

Exercice 1 (Différentielle du déterminant, [Rou03] exercice 26 p. 76)**.**

1. *Montrer que la fonction* $\det$ *est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $D_{\mathrm{Id}} \det = \operatorname{tr}$.*
Le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, c'est donc une fonction de classe C^1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Les valeurs propres de $\mathrm{Id} + tH$ sont les $1 + t\lambda_i$ de sorte que

$$\det(\mathrm{Id} + tH) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) = 1 + t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + o(t) = 1 + t \times \operatorname{tr}(H) + o(t),$$

dont on déduit $D_{\mathrm{Id}} \det(H) = \operatorname{tr}(H)$.

2. *En déduire que pour tout $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $D_X \det(H) = \operatorname{tr}(\bar{X} H)$ où $\bar{X}$ est la transposée de la comatrice X.*
Si X est inversible, alors en factorisant par X, le calcul précédant donne

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det(X) \times \det(\mathrm{Id} + X^{-1}H) = \det(X) \times \left(1 + \operatorname{tr}(X^{-1}H) + o(||H||)\right) \\ &= \det(X) + \operatorname{tr}(\bar{X}H) + o(||H||), \end{aligned}$$

d'où le résultat. Par ailleurs, les matrices inversibles formant un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une part, et la fonction $X \mapsto \bar{X}$ étant continue d'autre part, le résultat se généralise par continuité à tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Interprétation du gradient, [Rou03] exercice 28 p. 80)**.**
Le vecteur $\nabla_x f$ donne la "direction de plus grande pente en x".
Soit en effet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, un point $x \in \mathbb{R}^2$ et γ un arc paramétré tel que $\gamma(0) = x$ et $||\gamma'(t)|| = 1$ pout tout $t \geq 0$. La fonction composée $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ a alors pour dérivée à l'origine

$$(f \circ \gamma)'(0) = D_x f \gamma'(0) = \langle \nabla_x f, \gamma'(0) \rangle.$$

Le vecteur unitaire $\gamma'(0)$ variant, ce produit scalaire prend toutes les valeurs de $-||\nabla_x f||$ à $||\nabla_x f||$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La valeur maximale $||\nabla_x f||$ est obtenue si et seulement si $\gamma'(0)$ est colinéaire à $\nabla_x f$ et de même sens : c'est là que $f \circ \gamma$ croît le plus vite au voisinage de zéro.

Exercice 3 (Interprétation du jacobien, [Rou03] exercice 29 p. 82)**.** *Soit f un difféomorphisme de classe C^1 entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $0 \in U \cap V$ et $f(0) = 0$. On rappelle que si λ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et si X est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, on a $\lambda(AX) = |\det A| \lambda(X)$.*

1. *Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $r_\varepsilon > 0$ assez petit tel que pour $||x|| \leq r_\varepsilon$:*

$$\left|\left|(D_0 f)^{-1} f(x) - x\right|\right| \leq \varepsilon ||x||.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. La différentiabilité de f en zéro assure que pour un r_ε assez petit

$$||f(x) - D_0 f(x)|| \leq ||(D_0 f)^{-1}||^{-1} \times \varepsilon \times ||x||, \quad \textit{pour} \ \ ||x|| \leq r_\varepsilon.$$

On a alors naturellement pour $||x|| \leq r_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} ||(D_0 f)^{-1} f(x) - x|| &= ||(D_0 f)^{-1} \left(f(x) - D_0 f(x)\right)|| \\ &\leq ||(D_0 f)^{-1}|| \times || \left(f(x) - D_0 f(x)\right)|| \\ &\leq \varepsilon \times ||x||. \end{aligned}$$

2. *Montrer qu'il existe $\rho_\varepsilon > 0$ tel que pour $0 \leq \rho \leq \rho_\varepsilon$:*

$$(1 - \varepsilon) D_0 f(B_\rho) \subset f(B_\rho) \subset (1 + \varepsilon) D_0 f(B_\rho).$$

D'après le point précédent, si $||x|| \leq r \leq r_\varepsilon$, on a

$$||(D_0 f)^{-1} f(x)|| \leq ||x|| + \varepsilon \times ||x|| \leq (1 + \varepsilon) r$$

c'est-à-dire $(D_0 f)^{-1} f(B_r) \subset (1 + \varepsilon) B_r$ ou encore $f(B_r) \subset (1 + \varepsilon) D_0 f(B_r)$. D'autre part, comme $y \mapsto (1 - \varepsilon) D_0 f(y)$ est continue, il existe $\rho_\varepsilon \leq r_\varepsilon$ tel que $(1 - \varepsilon) D_0 f(B_{\rho_\varepsilon}) \subset f(B_{r_\varepsilon})$. Ainsi, si $y \in B_{\rho_\varepsilon}$, il existe $x \in B_{r_\varepsilon}$ tel que $(1 - \varepsilon) D_0 f(y) = f(x)$. Auquel cas, toujours d'après le point précédent

$$||x|| - (1 - \varepsilon)||y|| \leq ||(1 - \varepsilon) y - x|| = ||(D_0 f)^{-1}(f(x)) - x|| \leq \varepsilon ||x||,$$

c'est-à-dire $||x|| \leq ||y||$, et finalement

$$(1 - \varepsilon) D_0 f(B_{\rho_\varepsilon}) \subset f(B_{\rho_\varepsilon}).$$

3. *Montrer que*

$$|\det\, D_0 f| = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(f(B_r))}{\lambda(B_r)}.$$

Du dernier point, on déduit les inégalités suivantes pour ρ assez petit :

$$\lambda\left[(1 - \varepsilon) D_0 f(B_\rho))\right] \leq \lambda\left[f(B_\rho)\right] \leq \lambda\left[(1 + \varepsilon) D_0 f(B_\rho)\right],$$

c'est-à-dire

$$(1 - \varepsilon)^n \det(D_0 f) \lambda\left[(B_\rho))\right] \leq \lambda\left[f(B_\rho)\right] \leq (1 + \varepsilon)^n \det(D_0 f) \lambda\left[(B_\rho)\right],$$

d'où finalement

$$|\det\, D_0 f| = \lim_{\rho \to 0} \frac{\lambda(f(B_\rho))}{\lambda(B_\rho)}.$$

Exercice 4 (Interprétation de la divergence, [Rou03] exercice p.84)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\varphi_t(x)$ le flot associé issu de x, i.e. $\varphi_t(x)$ est la solution du système différentiel $y' = f(y)$ et $y(0) = x$. On note λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $f(x) = Ax$ pour une matrice constante A, calculer* $\mathrm{div}\ f(x)$*, $\varphi_t(x)$ et $\lambda(\varphi_t(K))$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.*

   Si $f(x) = Ax$, alors on a naturellement $D_{x_0}f = A$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système $y' = f(y)$ et $y(0) = x$ s'intègre en $y(t) = e^{tA}x = \varphi_t(x)$ et l'on a alors

   $$\lambda(\varphi_t(K)) = \lambda(e^{tA}K) = |\det e^{tA}|\lambda(K) = e^{t\,\mathrm{tr}(A)}\lambda(K).$$

   Le volume de $\varphi_t(K)$ est constant, croît, décroît donc selon le la nullité, le signe de la trace de A.

2. *Dans le cas général, montrer que*

   $$\mathrm{div}\ f(x) = \frac{\partial}{\partial t} \det D\phi_t(x)\Big|_{t=0}.$$

   On a localement

   $$\frac{\partial}{\partial t} D\phi_t(x) = D\frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x) = Df(\varphi_t(x))$$

   et comme $\varphi_0(x) = x$, on a

   $$D\varphi_0(x) = Id, \quad \frac{\partial}{\partial t} D\phi_t(x)\Big|_{t=0} = Df(x).$$

   et donc pour x fixé

   $$D\phi_t(x) = Id + t \times Df(x) + o(t),$$

   puis en utilisant la différentielle du déterminant :

   $$\det D\phi_t(x) = 1 + t \times \mathrm{tr}\, Df(x) + o(t) = 1 + t \times \mathrm{div}\ f(x) + o(t).$$

2 Théorème d'inversion locale

2.1 Le théorème d'inversion locale

Théorème 1 (d'inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, x un point de U et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On suppose que D_xf est inversible. Alors il existe des ouverts V et W tels que $x \in V \subset U$ et $f(x) \in W$ et tels que la restriction de f à V est un difféomorphisme de classe C^1 sur son image $W = f(V)$.*

Remarque 1. *La preuve du théorème d'inversion locale repose essentiellement sur argument de point fixe. On peut en trouver une heuristique p. 181 de [Rou03] et une preuve détaillée dans l'exercice 71 p. 213 du même [Rou03]. Voir également les notes d'Ismael Bailleul (2013-2014) sur la page de la prépa agreg.*

Le joli résultat suivant donne une version globale du théorème d'inversion. On rappelle qu'une application f est dite propre si l'image réciproque de tout compact par f est compacte. Dans l'espace euclidien, cela revient à dire que $||f(x)||$ tend vers l'infini avec $||x||$.

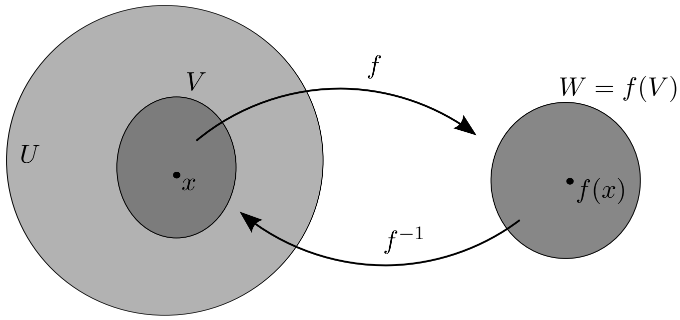

FIGURE 1 – Difféomorphisme local entre deux ouverts de l'espace euclidien.

Théorème 2 (d'inversion globale, Hadamard-Lévy)**.** *Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ;*
2. *f est propre et sa différentielle est inversible en tout point.*

Nous donnons la démonstration dans le cas C^2, la preuve du cas C^1 est plus difficile. La démonstration ci-dessous est issue de la quatrième édition de [QZ13] p. 399. On trouvera des preuves alternatives dans les éditions précédentes du Zuily-Queffélec ou sous des hypothèses plus fortes dans l'exercice 70 p. 212 de [Rou03] ou le théorème 2.1 p 131 de Avez.

Démonstration. Seul le sens réciproque 2) $\Rightarrow$ 1) est délicat. Nous allons construire un inverse à droite de f, i.e. une application *surjective* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}$. L'existence d'une telle fonction montre à la fois que f est surjective (parce que g l'est !) et injective, parce que si $f(x) = f(y)$ avec $x = g(a)$ et $y = g(b)$ alors $a = f\big(g(a)\big) = f\big(g(b)\big) = b$ et $x = y$. Précisément, nous allons construire toute une famille $(g_t)_{0 \le t \le 1}$ d'applications telles que $f \circ g_t = t\mathrm{Id}$, et l'inverse à gauche désirée correspondra à $t = 1$. En supposant que cela soit possible, si l'on dérive la relation $f \circ g_t(x) = tx$ par rapport à t, on obtient la relation $\big(D_{g_t(x)} f\big) \circ \big(\frac{\partial g_t}{\partial t}(x)\big) = x$. Comme par hypothèse $D_x f$ est partout inversible, cette relation impose à $g_t(x)$ d'être solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial g_t}{\partial t}(x) = \big(D_{g_t(x)} f\big)^{-1}(x), \quad s_0(x) = 0. \qquad (\star)$$

Puisque l'on a supposé f de classe C^2, sa différentielle est de classe C^1 et l'équation $(\star)$ possède effectivement une unique solution maximale $(t\,; x) \mapsto g_t(x)$, définie sur un ouvert

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(T_*(x), T^*(x)\big) \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

où elle est de classe C^1 (a posteriori, on a donc bien le droit de dériver par rapport à t). Tant que cela a un sens, on a ainsi $f \circ g_t(x) = tx$. Un point x_0 étant fixé, si $g_t(x_0)$ avait un temps de vie futur $T^*(x_0)$ fini, $g_t(x_0)$ devrait tendre vers l'infini lorsque t tend vers $T^*(x_0)$, impliquant la convergence de $f \circ g_t(x_0)$ vers l'infini **comme f est propre**. Cela contredirait la relation $f \circ g_t(x_0) = tx_0$, dans laquelle tx_0 reste bornée si $t \le T^*(x_0) < \infty$. On a donc en particulier construit une application régulière $g = g_1$. Reste à voir qu'elle est surjective. Puisque f est un difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale, l'inverse à droite g est aussi un difféomorphisme local, elle est en particulier ouverte. Aussi, $\mathbb{R}^n$ étant connexe, pour conclure il suffit de montrer que l'image de g est fermé. Soit donc $y_n = g(x_n)$ une suite convergence d'élements de l'image de g i.e. y_n converge vers y_∞ lorsque n tend vers l'infini. Comme f est continue, la suite $x_n = f(y_n)$ converge alors vers $x_\infty = f(y_\infty)$, mais comme g est continue la suite $y_n = g(x_n)$ converge alors vers $g(f(x_\infty)$, i.e. $y_\infty = g(f(x_\infty))$ est bien dans l'image de g, d'où le résultat. □

Remarque 2. *Notez que la démonstration ci-dessous permet de proposer ce résultat comme développement dans différentes leçons, théorème d'inversion local bien sûr, mais aussi les leçons concernant les équations différentielles, la connexité etc.*

2.2 Exemples d'applications du théorème d'inversion locale

On donne ici quelques exemples d'applications du théorème d'inversion locale. Outre les applications en géométrie que nous verrons dans les séances suivantes, vous en trouverez bien d'autres dans les livres cités dans ce document, en particulier dans l'excellent [Rou03].

2.2.1 Petits sous-groupes de $GL(\mathbb{R}^n)$

Proposition 2. *Il n'existe pas dans $GL(\mathbb{R}^n)$ de sous-groupes arbitrairement petits, au sens où il existe un voisinage U de l'identité tel que tout sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$ contenu dans U est trivial i.e. réduit à l'identité*

Démonstration. La démonstration ci-dessous est issue de [MT86] p. 59. Rappelons que l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par la série convergente

$$\exp(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} A^\ell/\ell!.$$

Le terme d'ordre 1 de la série indique que la différentielle en zéro de l'exponentielle est l'identité (qui est inversible !). Le théorème d'inversion locale assure qu'il existe alors un voisinage U_0 de la matrice nulle tel que $\exp : U_0 \to \exp(U_0)$ est un difféomorphisme. Quitte à restreindre U_0, on peut le supposer borné. Si $\exp\left(\frac{1}{2}U_0\right)$ contenait un sous-groupe G non trivial, il existerait des matrices $M \in G\backslash\{Id\}$ et $A \in U_0\backslash\{0\}$ telles que $M = \exp(A)$. On aurait alors d'une part $M^k = \exp(kA) \in G$ pour tout $k \geq 1$ et d'autre part $M^k = \exp(B_k)$ avec $B_k \in \frac{1}{2}U_0$. L'injectivité de l'exponentielle impose alors que $kA = B_k$ pour tous les k tels que $kA \in U_0$. Le voisinage U_0 étant borné, le premier entier k_0 tel que $kA \in \frac{1}{2}U_0$ et $(k+1)A \in U_0\backslash\frac{1}{2}U_0$ est fini, ce qui amène la contradiction $B_{k_0+1} = (k_0+1)A \in U_0\backslash\frac{1}{2}U_0$. □

Remarque 3. *Ce résultat peut être naturellement recasé dans de nombreuses leçons : exponentielle de matrice, groupe linéaire, action etc.*

2.2.2 Théorème du rang constant

Dans ce paragraphe, on considère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. Si r est un entier compris entre 1 et p, on désigne par $\pi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ l'application linéaire de projection $\pi_r(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$.

Théorème 3 (du rang constant, [Rou03] exercice 74 p. 223)**.** *Si D_xf est de rang constant égal à r lorsque x parcourt U, alors on peut associer à chaque $x_0 \in U$ des voisinages $U_0 \subset U$ et $V_0 \subset \mathbb{R}^p$ de x_0 et $f(x_0)$ respectivement, sur lesquels sont définis des difféomorphismes $g : U_0 \to U_0$ et $h : V_0 \to V_0$ tels que $f = h \circ \pi_r \circ g$.*

Démonstration. Voir exercice 74 p. 222 de [Rou03] ou exercice 10 p. 44 de [Laf96] . □

2.2.3 Réduction des formes quadratique, lemme de Morse

Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et A une matrice inversible de $\mathcal{S}$. On peut montrer qu'il existe alors un voisinage de A dans $\mathcal{S}$ composé de matrices inversibles. En effet, notons $E = \{m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM \in \mathcal{S}\}$, on a le lemme :

Lemme 1. *L'application $\varphi : E \to \mathcal{S}$ telle que $\varphi(M) := M^*AM$ est un difféomorphisme local entre un voisinage de l'identité dans E et un voisinage de A dans $\mathcal{S}$.*

Démonstration. D'après le théorème d'inversion locale, il suffit de voir que la différentielle $D_{Id}\varphi$, donnée par $(D_{Id}\varphi)(H) = (AH)^* + AH = 2AH$, est inversible. Elle est injective car A est inversible puis bijective car les espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et E sont de même dimension. □

Théorème 4 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 de différentielle nulle en zéro. On suppose que la différentielle seconde $D_0^2 f$ est non dégénérée et on note q_0 la forme quadratique associée. Alors, il existe un voisinage U de zero et un difféomorphisme $\Phi : U \to \Phi(U)$ tel que pour tout $x \in U$:*

$$f(x) = q_0(\Phi(x)).$$

Démonstration. Voir par exemple [Rou03] exercice 114 p. 344 ou [Laf96] exercice 11 p. 45. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2 f(x,x) dt.$$

La forme quadratique $q_x := \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2 f(\cdot,\cdot) dt$ dépend alors de façon C^1 du point de base x. On note A_x la matrice naturellement associée à la forme q_x. D'après le lemme ci-dessus, la matrice A_x se décompose en

$$A_x = \varphi^{-1}(A_x)^* A_0 \varphi^{-1}(A_x).$$

On définit une application de classe C^1 en posant $\Phi(x) := \varphi^{-1}(A_x)(x)$; elle vérifie alors $f(x) = f(0) + q_0(\Phi(x))$. Reste à voir que Φ est un difféomorphisme... □

3 Théorème des fonctions implicites

3.1 Énoncé du théorème

Théorème 5 (des fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, (x_0, y_0) un point de U et $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = (f^1(x,y), \dots, f^d(x,y))$ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $f(x_0,y_0) = 0$ et que la différentielle partielle*

$$D_y f(x_0,y_0) := \left(\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x_0,y_0) \right)_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}^2}$$

est inversible. Alors il existe un voisinage de (x_0,y_0) de la forme $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \to W$ de classe C^1, unique, tels que

$$((x,y) \in V \times W \text{ et } f(x,y) = 0) \Longleftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

De plus $D_y f(\cdot,\cdot)$ est inversible en tout point de $V \times W$.

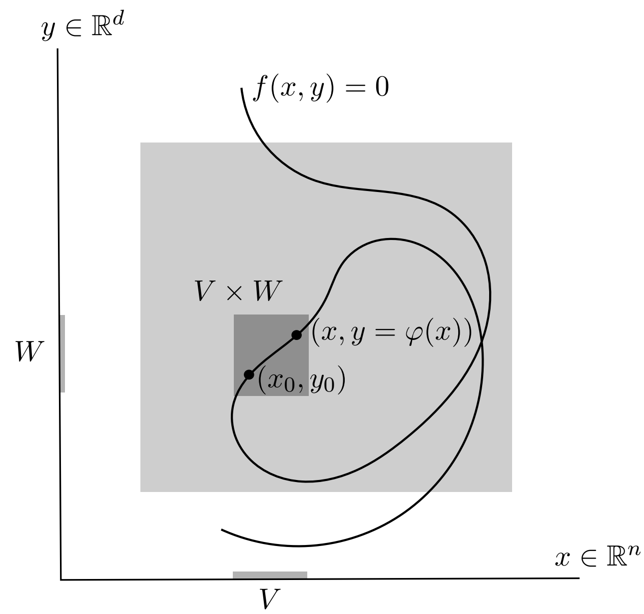

FIGURE 2 – Structure de graphe locale.

Démonstration. Comme pour le théorème d'inversion locale, la preuve classique repose sur un argument de point fixe, voir exercice 86 p. 251 de [Rou03]. □

3.2 Exemples d'applications

Nous donnerons des applications en géométrie dans les prochaines séances. Comme dans le cas du théorème d'inversion locale, vous en trouverez bien d'autres dans les livres cités dans ce document.

3.2.1 Des polynômes et leurs racines

Exercice 5 (Équation du troisième degré, exercice 78 p. 234)**.** *On note x, p, q trois variables réelles. L'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

définit-elle x comme fonction implicite de p et q ? On illustrera la discussion en esquissant la surface d'équation $x^3 + px + q = 0$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des coordonnées (q, p, x).

Exercice 6. Fonction racine *Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Montrer qu'il existe un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$, un voisinage V de x_0 et une fonction "racine" r de U dans V telle que $r(P)$ soit une racine de P pour tout P dans U.*

3.2.2 Champ de vecteur dépendant du temps

Dans la preuve du théorème d'inversion globale d'Hadamard-Lévy, nous avons introduit une famille d'application g_t associée à un champ de vecteurs dépendant du temps. Il s'agit d'un exemple de la méthode du chemin qui fait naturellement intervenir des champs inhomogènes en temps.

Théorème 6. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et U un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Alors, pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$ et chaque $x_0 \in U$, il existe une voisinage $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times V_0$ de (t_0, x_0) et une application $\varphi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times V_0 \to U$ tels que*

1. *φ est de classe C^1 ;*
2. *$\varphi(t_0, x) = x$ pour tout $x \in V_0$;*
3. *$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) = X(\varphi(t, x))$ pour $(t, x) \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times V_0$.*

Démonstration. Voir l'appendice G p. 140 de [Ave97] ou la section F p. 111 de [Laf96]. □

Références

[AF89] Jean-Marie Arnaudiès and Henry Fraisse. *Cours de mathématiques - 3 : compléments d'analyse*. Dunod, Bordas, 1989.

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[Ave97] A Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1997.

[BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces*. PUF, 1987.

[DC76] Manfredo Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

[Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentiables*. EDP Sciences, 1996.

[MT86] R Mneimé and R Testard. *Introduction à théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.

[Pos90] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, Variétés différentiables*. Mir, 1990.

[QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques*. Dunod, 2013.

[Rou03] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 2ème édition*. Cassini, 2003.

[Sch67] Laurent Schwartz. *Cours d'analyse, volume 2*. Hermann, 1967.