Exercice 1

1) Pour un lancer, l'espace de proba est

$\Omega = \{pile, face\}$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P} = \mathcal{B}(p)$

Pour n lancer, on considère ainsi

$\left(\Omega^n, \bigotimes_1^n \mathcal{F}, \bigotimes_1^n \mathcal{B}(p)\right)$

Si X_i est le resultat du i^e lancer, les X_i sont iid et d'après la LGN

$$\hat{p}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[ps]{\mathbb{P}} p.$$

2) $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_1 = face, \dots, X_{k-1} = face\ X_k = pile)$

$= (1-p)^{k-1} p$

ie $T \sim \mathcal{G}(p)$ geométrique.

- $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{P} = \mathcal{G}(p)$
- Si on répète n fois l'experience

$\left(\Omega^n, \bigotimes_1^n \mathcal{F}, \bigotimes_1^n \mathcal{G}(p)\right)$

Si on note T_i le resultat de la i^e exp.
les T_i sont iid avec $\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{p}$

donc $\frac{T_1 + \dots + T_n}{n} \xrightarrow[ps, \mathbb{P}]{LGN} \frac{1}{p}$

ie $\tilde{p}_n = \frac{n}{T_1 + \dots + T_n} \to p$

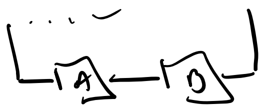
3) Oui les modèles sont identifiables car si $p \neq p'$

$\mathcal{B}(p) \neq \mathcal{B}(p')$ et $\mathcal{G}(p) \neq \mathcal{G}(p')$

Exercice 2

1) On note T la durée de vie du circuit, T_A et T_B les durées de vie des diodes. Pour $t>0$

$$\mathbb{P}(T>t) = \mathbb{P}(T_A>t \underset{\text{série}}{\text{ et }} T_B>t)$$



$$\stackrel{\perp}{=} \mathbb{P}(T_A>t)\,\mathbb{P}(T_B>t)$$

$$= e^{-\lambda_A t}\, e^{-\lambda_B t} = e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}.$$

Ainsi $T \sim \mathcal{E}(\lambda_A+\lambda_B)$

2) Pour une expérience, le modèle est

$$\Omega = \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \quad \mathbb{P} = \mathcal{E}(\lambda_A+\lambda_B)$$

Pour n expériences

$$\left(\Omega^n, \bigotimes_i^n \mathcal{F}, \bigotimes_i^n \mathcal{E}(\lambda_A+\lambda_B)\right)$$

3) Si T_i est le i^e temps de vie, les T_i sont iid avec $\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}$. D'après la LGN

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{T_1+\dots+T_n} \longrightarrow \lambda_A+\lambda_B.$$

4) il faudrait isoler les composants A et B dans des circuits séparés.

Exercice 3

1) On note $\mathbb{P}_\alpha \sim \mathcal{U}_{[-\alpha^2,\alpha^2]}$

alors si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_{-\alpha}$ donc le modèle n'est pas identifiable

2) On note $\mathbb{P}_N \sim \mathcal{U}_{[\![0,N]\!]}$. Alors si $N \neq N'$

$\mathbb{P}_N(\{0\}) = \dfrac{1}{N+1} \neq \dfrac{1}{N'+1} = \mathbb{P}_{N'}(\{0\})$ donc

$\mathbb{P}_N \neq \mathbb{P}_{N'}$ et le modèle est identifiable

3) De même si $\mathbb{P}_{m,\sigma^2} \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors

$\mathbb{P}_{m,\sigma^2} \neq \mathbb{P}_{m',\sigma'^2}$ dès lors que $(m,\sigma^2) \neq (m',\sigma'^2)$

donc le modèle est identifiable.

Exercice 4

Oui, $\overline{X}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont des statistiques car elles ne dépendent que des variables X_i

En revanche, S dépend de σ^2 (inconnue)

T " de m

donc ce ne sont pas des statistiques.

Exercice 5

1) Soit X_i des va iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$ alors on peut écrire

$$Y = \nu \mathbb{1} + \sigma^2 X \quad \text{avec } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) D'après la LGN, comme les Y_i sont iid $\sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Y_i \xrightarrow[\mathbb{P},\, L^p]{p.s} \nu \,, \quad \frac{1}{\sigma} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum Y_i - \nu \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 6

$$Y = \nu . \mathbb{1} + \sigma M \varepsilon \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\nu, \sigma^2 M^t M\right) = \mathcal{N}\left(\nu, \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2/3 & 0 \\ & \sigma^2 & \\ 0 & & \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 7

1) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(Y_\theta \in [a,b]) = \mathbb{P}(Y_\theta \in [a,b] \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(Y_\theta \in [a,b] \text{ et } R = -1)$$

$$= \mathbb{P}(X + \theta \in [a,b] \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(X - \theta \in [a,b] \text{ et } R = -1)$$

$$\overset{\perp}{=} \mathbb{P}(X \in [a-\theta, b-\theta])\mathbb{P}(R=1) + \mathbb{P}(X \in [a+\theta, b+\theta])\mathbb{P}(R=-1)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X \in [a-\theta, b-\theta]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X \in [a+\theta, b-\theta])$$

$$= \frac{1}{2} \int_{a-\theta}^{b-\theta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{1}{2} \int_{a+\theta}^{b+\theta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\mathbb{P}(Y_\theta \in [a,b]) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\,dx + \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x+\theta)^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+\theta)^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\right)}_{\text{densité de } Y_\theta \text{ sur } \mathbb{R}} dx$$

2) Pour une expérience, si on note $\mathbb{P}_\theta$ la loi de Y_θ

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \mathbb{P}_\theta$

Pour n expériences $\left(\Omega^n, \bigotimes_i^n \mathcal{F}, \bigotimes_i^n \mathbb{P}_\theta\right)$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{-\theta}$ donc le modèle n'est pas identifiable.

3) Si on sait à l'avance que $\theta \in \mathbb{R}^+$, le modèle est indentifiable

$\mathbb{E}[Y_\theta] = \mathbb{E}[\theta R + X] = \mathbb{E}[\theta]\mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[X] = 0$

$\mathrm{var}(Y_\theta) \underset{ici}{=} \mathbb{E}[Y_\theta^2] = \mathbb{E}[(\theta R + X)^2]$

$= \mathbb{E}[\theta^2 R^2 + 2\theta R X + X^2]$

$= \theta^2\,\mathbb{E}[R^2] + 2\theta\,\mathbb{E}[RX] + \mathbb{E}[X^2]$

$= \theta^2 + 0 + 1$

Si Y_i sont les résultats de l'exp, la LGN implique que

$\frac{1}{n}\sum_i^n Y_i^2 \xrightarrow[\mathbb{P}]{p.s} 1 + \theta^2$ donc $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i^n Y_i^2 - 1} \xrightarrow[\mathbb{P}]{p.s} \theta$

Exercice 8

1) Modèle $\left(\mathbb{R}^n, \hat{\otimes}\mathcal{T}, \hat{\otimes} P_\theta\right)$ où $P_\theta = e^{\theta}\left(e^{-x}\right)\mathbb{1}_{x>\theta}$

Le modèle est identifiable, en fait

$$P_\theta \sim (V+\theta) \text{ où } V \sim \mathcal{E}(1).$$

de sorte que $P_\theta = P_{\theta'}$ si $\theta \neq \theta'$

(par ex car $P_\theta([1,+\infty[) = e^{\theta-1} \neq e^{\theta'-1} = P_{\theta'}([1,+\infty[))$

2) D'après ci dessus, si $V \sim \mathcal{E}(1)$

$$\mathbb{E}_\theta[X_1] = \mathbb{E}[V+\theta] = \mathbb{E}[V] + \theta = 1+\theta$$

Ainsi $\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i - 1\right) \xrightarrow[p.s, P]{LGN} \theta.$

3) $$\mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}_n-\theta)^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i - 1 - \theta\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_1^n (V_i+\theta) - 1 - \theta\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_1^n (V_i - \mathbb{E}[V_i])\right)^2\right]$$

$$\overset{i.i.d}{=} \frac{1}{n}\operatorname{var}(V_1) \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

4) Si $\tilde{\theta}_n = \min(X_i)$ on a $\tilde{\theta}_n \in [\theta, +\infty[$

$$\mathbb{E}\left[(\min(X_1 \dots X_n) - \theta)^2\right] = \int_{\mathbb{R}^+} P\left((\min(X_i)-\theta)^2 > t\right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} P\left(\min(X_i) - \theta > \sqrt{t}\right) dt = \int_{\mathbb{R}^+} P(\min(V_i) > s)\, 2s\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(V_1 > s)^n \, 2s\,ds = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ns} \, 2s\,ds$$

$$\underset{ns=u}{=} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-u} \, 2u\,du$$

Ainsi $\left| \begin{array}{l} \mathbb{E}\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] = \frac{c}{n} \\ \mathbb{E}\left[(\tilde{\theta}_n - \theta)^2\right] = \frac{c'}{n^2} \end{array} \right.$

Exercice 9

1) Si X à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$. avec $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

On considère le vecteur des sommes partielles

$(p_0 = 0, p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, 1)$

On choisit une variable uniforme dans $[0,1]$.

Si U tombe dans $[p_0 + \dots + p_{i-1}, p_0 + \dots + p_{i-1} + p_i[$

on choisit x_i

2) On remarque que $\{t \leq F(x)\} \Leftrightarrow \{F^{-1}(t) \leq x\}$

Si $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x))$

$= F(x)$.

ie $F^{-1}(U) \sim X$.

3) $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(t))$

$= F(F^{-1}(t)) = t$ ie $F(X) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.