

Exercice 1

On note X_i l'erreur commise. D'après l'énoncé les X_i sont iid avec $X_i \sim U\left[-\frac{1}{2 \cdot 10^N}, \frac{1}{2 \cdot 10^N}\right]$. On a alors

$$\begin{cases} m = \mathbb{E}[X_i] = 0 \\ \sigma^2 = \text{var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] = 10^N \int_{-\frac{1}{2 \cdot 10^N}}^{\frac{1}{2 \cdot 10^N}} x^2 dx = 10^N \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{1}{2 \cdot 10^N}}^{\frac{1}{2 \cdot 10^N}} = \frac{10^{2N}}{12} \end{cases}$$

Si on fait n opérations, l'erreur finale est $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

D'après le TLC, on a alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - m \right) = \sqrt{12} \cdot 10^N \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| \leq \alpha) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{12} \cdot 10^N \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \leq \alpha \sqrt{12} \cdot 10^N \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\stackrel{\text{TLC}}{\approx} \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$= \Phi\left(\alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= 2 \Phi\left(\alpha \frac{\sqrt{12} \cdot 10^N}{\sqrt{n}}\right) - 1.$$

Si $\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}$ et $n = 10^{2N}$ alors

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq \alpha) \approx 2 \Phi(1) - 1 \approx 0,68.$$

Exercice 2

- 1) Les variables $X_i = f(U_i)$ sont iid car les U_i le sont.
 f est continue sur $[a, b]$ donc bornée de sorte que
 $E[|X_i|] \leq \|f\|_\infty$. D'après la LGW, on a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[P.L.]{} E[X_1] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) \rightarrow E[f(U)] = \int_0^1 f(u) du.$$

- 2) . Par définition de l'exponentielle $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
 donc en faisant $x = n$, $e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = 1$ pour tout n .
 et par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 1$.

- Si $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{P}(1)$ alors $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(n)$
 avec $E[S_n] = n$ et $\text{var}(S_n) = n$.

Si f continue bornée, d'après le TLC, on a

$$E\left[f\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(W(0,1))] = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

Exercice 3

Si $U_i \sim U_{[0,1]}$ alors $|\log(U_i)| \in L^1$ car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\log(U_i)|] &= -\mathbb{E}[\log(U_i)] = -\int_0^1 \log(u) du \\ &= -\left[u \log(u) - u \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

On a donc $\log(X_n) = \frac{1}{n} \sum_i \log(U_i) \xrightarrow[p.s]{LGN} -1$
de sorte que $X_n \xrightarrow[p.s]{} e^{-1}$.

Exercice 4

Les variables (X_i, X_{i+1}) ne sont pas i.i.d mais en revanche
les variables $(X_{2i}, X_{2i+1})_{i \geq 1}$ le sont. Ainsi par le LGN

$$\frac{X_1 X_2 + X_3 X_4 + \dots}{n/2} \xrightarrow[p.s]{LGN} \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]^2 = m^2$$

$$\frac{X_2 X_3 + X_4 X_5 + \dots}{n/2} \xrightarrow[p.s]{LGN} m^2.$$

$$\text{Finalement } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_{i+1} \rightarrow m^2.$$

Exercice 5

- 1) Si $X \geq 0$ alors $\forall t > 0, X \geq t \iff \frac{X}{t} \geq 1$.
En prenant l'espérance $\forall t > 0, P(X \geq t) = 0$.
Ainsi $\forall t \in \mathbb{Q}^+ P(0 \leq X < t) = 1$.
- 2) Les x tq $P(X=x) > 0$ sont des points de discontinuité de F_X . Une fonction monotone a un nb au plus dénombrable de pts de discontinuité.
- 3) Par ex si $X \sim \text{Cauchy}$ i.e. $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
alors si on pose $Y = |X|^{\frac{1}{m+1}}$
alors $E[Y^m] = E[|X|^{\frac{m}{m+1}}] = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{m}{m+1}}}{1+x^2} < \infty$
mais $E[Y^{m+1}] = E[|X|] = +\infty$.

Exercice 6

- 1) Prendre $X_n = (-1)^n X$ avec $X \sim U(0,1)$.
alors $f(X_n) = f(X)$ mais $X_n - X = 0$ ou $2X$
selon $n \dots$
- 2) $X = 0$, $X_n = \begin{cases} n & \text{avec prob. } \frac{1}{n} \\ 0 & \text{avec prob. } 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$
 $P(|X_n - 0| \geq \epsilon) = P(X_n \geq \epsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$
mais $E[X_n] = 1 \neq E[X] = 0$

Exercice 7

1) a) Rappel: $X_n \xrightarrow{P} X$ ssi: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{Ainsi: } \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{P} 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\mathbb{1}_{A_n} > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$$P(\mathbb{1}_{A_n} = 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) Rappel: $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ssi: $E[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{Ici: } E[|\mathbb{1}_{A_n} - 0|^p] = E[\mathbb{1}_{A_n}^p] = E[\mathbb{1}_{A_n}] = P(A_n)$$

$$\text{ic } \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{L^p} 0 \Leftrightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

c) Rappel: $X_n \xrightarrow{ps} X$ si: $P(\omega \text{ tq } X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)) = 1$.

$\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0$ à partir d'un certain rang

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

$$2) \text{ On prend } X_n \text{ tel que } \begin{cases} P(X_n=0) = 1 - \frac{1}{n} \\ P(X_n=n) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Alors si f continue bornée

$$E[f(X_n)] = \underbrace{f(0)}_{\rightarrow 0} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \underbrace{f(n)}_{\rightarrow 0 \text{ car } f \text{ bornée}} \cdot \frac{1}{n}$$

donc $X_n \xrightarrow{P} 0$. Mais $E[X_n] = 1 \neq 0$.

3) Si $X \sim E(\lambda_m)$ alors

$$F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\lambda_n t}.$$

Alors: $F_{X_n}(t)$ converge pour que $n \rightarrow \infty$

ssi: $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \in (0, +\infty]$.

Si $\lambda \in (0, +\infty)$ alors $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

ie $X_n \xrightarrow{D} E(\lambda)$

Si $\lambda = +\infty$, $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Exercice 8

On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

1) On a la décomposition suivante, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{it(X_n + Y_n)}] - \mathbb{E}[e^{itX}] &= \mathbb{E}[(e^{itX_n} - e^{itX}) e^{itY_n}] + \mathbb{E}[e^{itX} (e^{itY_n} - 1)] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[(e^{itX_n} - e^{itX}) (e^{itY_n} - 1)]}_{A_n(t)} + \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX_n} - e^{itX}]}_{B_n(t)} + \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX} (e^{itY_n} - 1)]}_{C_n(t)} \end{aligned}$$

Naturellement, on a $A_n(0) = B_n(0) = C_n(0) = 0$.

On va montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t) = 0.$$

- Comme $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, on a directement $B_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \varepsilon \ll 1$ assez petit pour que
 $\forall |x| < \varepsilon$, on ait $|e^{itx} - 1| < 2|t|\varepsilon$.

On écrit alors

$$C_n(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX} (e^{itY_n} - 1) \mathbb{1}_{|Y_n| < \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[e^{itX} (e^{itY_n} - 1) \mathbb{1}_{|Y_n| > \varepsilon}\right]$$

de sorte que

$$|C_n(t)| \leq 2|t|\varepsilon + 2\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- On conclut de même pour $A_n(t)$.

On a donc bien $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

⚠ La cv en proba est fautive : prendre $\begin{cases} X_n = (-1)^n X \\ Y_n = \frac{1}{n} \end{cases}$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

2) On fixe $\varepsilon > 0$. Comme X v.a. il existe $A > 0$
 tq $P(|X| > A) \leq \varepsilon$.

Si $X_n \xrightarrow{P} X$, on a $P(|X_n| > A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(|X| > A)$
 donc pour n assez grand $P(|X_n| > A) \leq 2\varepsilon$.

Pour $\delta > 0$, on écrit alors

$$\begin{aligned} P(|X_n Y_n| > \delta) &= P(|X_n Y_n| > \delta \text{ et } |X_n| > A) \\ &\quad + P(|X_n Y_n| > \delta \text{ et } |X_n| \leq A) \\ &\leq P(|X_n| > A) + P(|Y_n| > \frac{\delta}{A}) \\ &\leq 2\varepsilon + P(|Y_n| > \frac{\delta}{A}) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $Y_n \xrightarrow{P} 0$.