Université de Rennes 1 — Master 2 de Mathématiques
Calcul stochastique — année 2017-2018

Devoir en temps libre

à rendre avant le 15.12.2017

Exercice 1. *Processus de Langevin*
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère le processus $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ issu de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt, \\ \\ dY_t := -Y_t dt + dB_t. \end{cases}$$

1. Explicitez le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$, montrez qu'il est gaussien et précisez sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. Le processus $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ est-il gaussien ? Quelle est la régularité des trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$?
3. Montrez que le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est ergodique et explicitez sa mesure invariante.
4. Montrez que pour $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on a
$$Y_{\lambda t} - y_0 = -X_{\lambda t} + x_0 + B_{\lambda t}.$$
En déduire que, si t est fixé, l'écart quadratique $\mathbb{E}[X_{\lambda t}^2]$ vérifie l'asymptotique
$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[X_{\lambda t}^2] = t.$$
5. Montrer que, lorsque λ tend vers l'infini, le processus $(X_{\lambda t}/\sqrt{\lambda})_{t\geq 0}$ converge en loi, au sens des marginales de dimension finie, vers un mouvement brownien réel standard.

Exercice 2. *Mouvement brownien cinétique dans le plan*
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Identifiant le plan complexe $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on considère le processus $(z_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$z_t = (x_t, y_t) := e^{iB_t}, \quad t \geq 0.$$

On **admettra** que le processus $(z_t)_{t\geq 0}$ ainsi défini n'est autre que le mouvement brownien sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, issu du point $(1, 0)$.

1. Montrez que le processus $(x_t, y_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique
$$\begin{cases} dx_t = -\dfrac{x_t}{2} dt - y_t dB_t, \\ \\ dy_t := -\dfrac{y_t}{2} dt + x_t dB_t. \end{cases}$$
2. En déduire le générateur infinitésimal de $(x_t, y_t)_{t\geq 0}$ et l'expression en coordonnées cartésiennes du laplacien $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ sur le cercle.

3. Montrez qu'il existe un mouvement brownien réel stantdard W tel que $(x_t)_{t\geq 0}$ soit solution de l'équation différentielle stochastique
$$dx_t = -\frac{x_t}{2}dt + \sqrt{1-x_t^2}dW_t.$$
4. En déduire que le processus $(x_t)_{t\geq 0}$ est ergodique et précisez sa mesure invariante.
5. Si t est fixé, que pouvez-vous dire du comportement asymptotique lorsque λ tend vers l'infini de l'intégrale $I(\lambda, t)$ définie ci-dessous ?
$$I(\lambda, t) := \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda t}(1-x_s^2)ds.$$
6. On considère à présent le mouvement brownien cinétique $Z_t = (X_t, Y_t)$ à valeurs dans le plan $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, i.e. le processus obtenu en intégrant le mouvement brownien sur le cercle :
$$X_t := \int_0^t x_s ds, \quad Y_t := \int_0^t y_s ds.$$
En vous inspirant de l'exercice 1, montrez qu'il existe une constante explicite C telle que, à t fixé, lorsque λ tend vers l'infini
$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[||Z_{\lambda t}||_2^2\right] = C \times t.$$

Remarque. *En travaillant un peu plus, on peut montrer un résultat analogue à celui du premier exercice, à savoir que le processus $(Z_{\lambda t}/\sqrt{\lambda})_{t\geq 0}$ converge en loi vers vers un mouvement brownien bi-dimensionnel. Les graphiques ci-dessous montrent des simulations des trajectoires du processus $(Z_{\lambda t}/\sqrt{\lambda})_{t\geq 0}$ pour $0 \leq t \leq 1$ et pour des valeurs croissantes de $\lambda = 10, 10^3, 10^6$.*