Correction Contrôle continu # 2

Question de cours. [4 points]
Donner deux caractérisations distinctes du mouvement brownien réel.
Solution : Cf. cours.

Exercice 1. [6 points]
On considère deux suites indépendantes $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $n \geq 1$, on définit alors le processus $(X_n(t))_{t\in\mathbb{R}}$ par la formule :

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{kt}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{kt}{n}\right).$$

1. Montrer que le processus $(X_n(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un processus gaussien et préciser sa fonction de covariance.
   Toute combinaison linéaire de variables $X_n(t_i)$ avec $t_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq p$ est en fait une combinaison linéaire des variables gaussiennes indépendantes a_k pour $1 \leq k \leq n$, donc une variable gaussienne, d'où le caractère gaussien. Ensuite si $s, t \in \mathbb{R}$, un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \rho_n(s,t) := \mathbb{E}[X_n(s)X_n(t)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{ks}{n}\right)\cos\left(\frac{kt}{n}\right) + \sin\left(\frac{ks}{n}\right)\sin\left(\frac{kt}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k(s-t)}{n}\right). \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables $X_n(t)$ et $X_n'(t) := \frac{d}{dt}X_n(t)$ sont indépendantes.
   D'après ci-dessus, en faisant $s = t$, on a $\mathbb{E}[X_n(t)^2] = 1$. En dérivant par rapport à t sous le signe somme, on obtient alors $\mathbb{E}[X_n(t)X_n'(t)] = 0$. Comme le couple $(X_n(t), X_n'(t))$ est un vecteur gaussien centré, orthogonalité équivaut à indépendance, d'où le résultat.
3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, le processus $(X_n(t))_{t\in\mathbb{R}}$ converge en loi (au sens des marginales de dimension finie) vers un processus gaussien $(X_\infty(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Préciser sa fonction de covariance.
   Fixons $t_1 \leq t_2 \leq \ldots, \leq t_p$ des réels. Le vecteur $(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_p))$ est un vecteur gaussien centré dont la matrice de covariance Γ_n s'exprime facilement à l'aide de la fonction de covariance ρ_n. Lorsque n tend vers l'infini, ce vecteur converge vers un vecteur limite (alors forcément gaussien) si et seulement si sa matrice de covariance Γ_n converge et donc si et seulement si la fonction de covariance ρ_n est elle-même convergente. Or, on reconnaît en ρ_n une somme de Riemann de sorte que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k(s-t)}{n}\right) = \int_0^t \cos(u(t-s))du = \frac{\sin(t-s)}{t-s}$$

   avec la convention que $\sin(0)/0 = 1$ sur la diagonale.

Exercice 2. [4 points]
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On admet l'existence d'un processus continu et adapté X tel que $X_0 = 0$ et vérifiant l'équation suivante, pour tout $0 \leq t < \tau := \inf\{s > 0, X_s \notin]-\pi/2, \pi/2[\}$

$$X_t = -\int_0^t \frac{\tan(X_s)ds}{(1+\tan(X_s)^2)^2} + \int_0^t \frac{dB_s}{1+\tan(X_s)^2}.$$

1. Que dire du processus $(Y_t)_{0\leq t<\tau}$ défini par $Y_t := \tan(X_t)$?
   Il s'agit d'appliquer la formule d'Itô à la fonction tangente, qui est bien de classe C^2 sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ où X_t prend ses valeurs pour tout $t < \tau$. La dérivée de tan est $1 + \tan^2$ de sorte que

$$\begin{aligned} dY_t = d\tan(X_t) = & \tan'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\tan''(X_t)d\langle X, X\rangle_t \\ = & \left(1+\tan(X_t)^2\right) \times \left[-\frac{\tan(X_t)dt}{(1+\tan(X_t)^2)^2} + \frac{dB_t}{1+\tan(X_t)^2}\right] \\ & + \frac{1}{2} \times \left(2\tan(X_t)\left(1+\tan(X_t)^2\right)\right) \frac{dt}{\left(1+\tan(X_t)^2\right)^2} \\ = & dB_t. \end{aligned}$$

   Autrement dit, comme $X_0 = 0$, le processus $Y_t = \tan(X_t)$ n'est autre qu'un mouvement brownien standard. De manière équivalente, le processus X_t s'écrit $X_t = \arctan(Y_t)$ où Y_t est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$.

2. En déduire que $\tau = +\infty$ presque sûrement et que $(X_t)_{0\leq t<\tau}$ est récurrent dans $]-\pi/2, \pi/2[$.
   Le mouvement brownien Y_t est bien défini pour tout $t \geq 0$ et il est récurrent dans $\mathbb{R}$ de sorte son image par la bijection arctan est aussi elle aussi bien définie pour tout temps $t \geq 0$ et est récurrente dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 3. [6 points]
Soient $T > 0$ et $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien réel. Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ et $(e_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus élémentaire adapté à la filtration naturelle brownienne

$$e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k[}(t).$$

L'intégrale de Stratonovich du processus e_t contre le mouvement brownien est alors définie par :

$$\int_0^T e_t \circ dB_t := \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{t_{k-1}} + e_{t_k}}{2}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

Autrement dit, si l'intégrale d'Itô correspond à une méthode d'intégration "rectangle à gauche", l'intégrale de Stratonovich correspond à une méthode d'intégration "point milieu". L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ dB_t$ d'un processus adapté $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est alors définie comme la limite d'une suite $\int_0^T X_t^n \circ dB_t$ où X^n est une suite de processus élémentaires convergeant vers X dans $\mathbb{L}^2$. On admettra que cette limite existe et qu'elle est indépendante de la suite approximante.

1. Calculer l'intégrale au sens de Stratonovich

$$\int_0^T B_t \circ dB_t.$$

Par définition, l'intégrale à calculer est la limite d'intégrales élémentaires correspondant à une approximation de l'intégrande sur $[0, T]$. Choisissons une telle approximation, par exemple

$$B_t^n := \sum_{k=1}^{2^n} B_{\frac{(k-1)T}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{(k-1)T}{2^n}, \frac{kT}{2^n}[}(t).$$

On a alors, le long de la subdivision dyadique

$$\begin{aligned}\int_0^T B_t^n \circ dB_t &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}} + B_{\frac{kT}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n} \left(B^2_{\frac{kT}{2^n}} - B^2_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) = \frac{B_T^2}{2}\end{aligned}$$

En passant à limite en n, on obtient donc simplement

$$\int_0^T B_t \circ dB_t = \frac{B_T^2}{2}$$

2. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^2, en effectuant un développement limité à l'ordre un, montrer que

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = f(B_T) - f(B_0).$$

Comme plus haut, en passant par une approximation dyadique de l'intégrande, on a

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) + f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2^n} f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right),
\end{aligned}$$

autrement dit, la différence entre les intégrales de Stratonovich et d'Itô du processus élémentaire $f'(B_t^n)$ s'écrit

$$\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t - \int_0^T f'(B_t^n) dB_t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \left[f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right)\right] \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right].$$

Or la formule de Taylor à l'ordre 1 donne

$$f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) = f''\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right] + o\left(\left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]\right).$$

En injectant cet estimé dans la dernière équation, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t - \int_0^T f'(B_t^n) dB_t &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} f''\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]^2 \\
&\quad + \ o\left(\sum_{k=1}^{2^n} \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]^2\right).
\end{aligned}$$

Par définition de la variation quadratique, lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du membre de droite converge en probabilité vers

$$\frac{1}{2} \int_0^T f''(B_t) dt.$$

Par ailleurs, le reste est un petit o de la variation quadratique du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$, qui vaut donc T. Autrement, le reste converge vers zero en probabilité lorsque n tend vers l'infini. Finalement, en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = \int_0^T f'(B_t) \circ dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B_t) dB_t,$$

et par la formule d'Itô, le membre de droite est égal à $f(B_T) - f(B_0)$ d'où

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = f(B_T) - f(B_0).$$

3. Soit g une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et soit X_t un processus adapté vérifiant la relation

$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ dB_s, \quad \forall t \in [0,T].$$

Soit Y_t le processus défini par l'intégrale d'Itô

$$Y_t = \int_0^t g(X_s) dB_s, \quad \forall t \in [0,T].$$

Montrer que pour tout $t \in [0,T]$

$$X_t - Y_t = \frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)g'(X_s)ds.$$

Fixons $0 \leq t \leq T$. On revient à la définition des deux intégrales en terme de processus élémentaires. Sur une subdivision dyadique de $[0,t]$, on approche le processus X par le processus élémentaire

$$X_s^n := \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}[}(s).$$

On a alors d'une part

$$\int_0^t g\left(X_s^n\right) \circ dB_s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right)\right]\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right],$$

et d'autre part, on a aussi

$$\int_0^t g\left(X_s^n\right) dB_s = \sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\right]\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right].$$

En faisant la différence, il vient

$$\begin{aligned}\Delta_n \quad &:= \int_0^t g\left(X_s^n\right) \circ dB_s - \int_0^t g\left(X_s^n\right) dB_s \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) - g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\right]\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right].\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, on a

$$g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) - g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) = g'\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\left(X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + o\left(X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)$$

et l'équation vérifiée par X nous donne que

$$X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}} = g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right] + o\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right],$$

autrement dit

$$g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) - g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) = g'\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right] + o\left(B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right).$$

En injectant cet estimé dans l'expression de Δ_n, on obtient alors

$$\Delta_n \quad := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2^n} g'\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right]^2 + o\left(\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right]^2\right),$$

qui tend en probabilité lorsque n tend vers l'infini vers $\frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)g'(X_s)ds$, d'où le résultat.