# Devoir en temps libre

À rendre pour le 13/10/2015.

Dans ce devoir, on se propose d'étudier le module de continuité du mouvement brownien. Le théorème suivant est du à Paul Lévy.

**Théorème** (Module de continuité de Lévy)**.** *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien réel défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et soit* $h$ *la fonction définie sur* $(0,+\infty)$ *par* $h(t) := \sqrt{2t\log(1/t)}$. *Alors on a*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{\substack{0\leq s<t\leq 1\\ t-s\leq\varepsilon}}\frac{|B_t-B_s|}{h(\varepsilon)}\right)=1\right)=1.$$

*Démonstration.* On cherche tout d'abord à montrer que la lim sup de l'énoncé du théorème est presque sûrement plus grande que 1. Pour cela, on fixe $\delta\in(0,1)$ et on considère les évènements $A_n$ définis par

$$A_n := \left\{\sup_{1\leq k\leq 2^n}\left|B_{\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k-1}{2^n}}\right|\leq(1-\delta)h(2^{-n})\right\}.$$

1. Montrer que l'on a la majoration

$$\mathbb{P}(A_n)\leq\left(1-2\int_{(1-\delta)\sqrt{2n\log(2)}}^{+\infty}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2^n}.$$

2. Via une intégration par parties, montrer que pour $a>0$ :

$$\int_a^{+\infty}e^{-x^2/2}dx>\frac{a}{1+a^2}e^{-a^2/2}.$$

3. En utilisant le fait que $1-s\leq e^{-s}$, en déduire qu'il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\mathbb{P}(A_n)\leq\exp\left(-C\frac{2^{n(1-(1-\delta)^2)}}{\sqrt{n}}\right).$$

4. Conclure, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, que la lim sup de l'énoncé du théorème est effectivement presque sûrement plus grande que 1.

On cherche maintenant à montrer que la lim sup de l'énoncé du théorème est plus petite que 1. Pour cela, on fixe à nouveau $\delta\in(0,1)$ et $\varepsilon>0$ tel que $(1+\varepsilon)^2(1-\delta)>1+\delta$. On désigne par $K_n$ l'ensemble des couples d'entiers $(i,j)$ tels que $0\leq i<j<2^n$ and $0<j-i\leq 2^{n\delta}$. Enfin, on considère les évènements $\widetilde{A}_n$ définis par

$$\widetilde{A}_n=\left\{\sup_{\substack{(i,j)\in K_n\\ j-i=k}}\frac{\left|B_{\frac{j}{2^n}}-B_{\frac{i}{2^n}}\right|}{h(k2^{-n})}\geq(1+\varepsilon)\right\}.$$

5. En utilisant l'inégalité
$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2}dx < \frac{e^{-a^2/2}}{a},$$
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui peut changer de ligne à ligne), telle que l'on ait les majorations
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widetilde{A}_n) &\leq C \times \sum_{\substack{(i,j)\in K_n \\ j-i=k}} \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log(k^{-1}2^n)}}^{+\infty} e^{-x^2/2}. \\ &\leq C \times \sum_{\substack{(i,j)\in K_n \\ j-i=k}} \frac{1}{\sqrt{\log(k^{-1}2^n)}} \exp\left(-(1+\varepsilon)^2 \log(k^{-1}2^n)\right) \\ &\leq C \times 2^{-n(1-\delta)(1+\varepsilon)^2} \sum_{\substack{(i,j)\in K_n \\ j-i=k}} \frac{1}{\sqrt{\log(k^{-1}2^n)}}.\end{aligned}$$
6. En majorant le nombre de points dans $K_n$, en déduire que
$$\mathbb{P}(\widetilde{A}_n) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)}.$$
7. En utilisant à nouveau le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que pour $n \geq n_0 = n_0(\omega)$ assez grand, on a pour tout $(i,j) \in K_n$ avec $j - i = k$ :
$$\left| B_{\frac{j}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right| < (1+\varepsilon)h(k2^{-n}).$$
8. Conclure en utilisant la continuité des trajectoires browniennes.

□

La loi du logarithme itéré énoncée ci-dessous précise l'entendue typique des trajectoires browniennes en temps court comme en temps long.

**Théorème** (Loi du logarithme itéré)**.** *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien réel défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. On définit la fonction* $\log_2$ *sur* $(1, +\infty)$ *par* $\log_2(x) = \log(\log(x))$*. Alors, au voisinage de zéro, on a*
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log_2(1/t)}} = 1\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log_2(1/t)}} = -1\right) = 1.$$
*Au voisinage de l'infini, on a de même*
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log_2(t)}} = 1\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{t\to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log_2(t)}} = -1\right) = 1.$$

*Démonstration.* Elle est similaire à celle du théorème concernant le module de continuité : en utilisant deux fois le lemme de Borel-Cantelli, on montre que presque sûrement, la première $\limsup$ est à la fois plus grande et plus petite que 1. Le résultat concernant la $\liminf$ découle immédiatement car $B$ et $-B$ ont même loi. Enfin, l'inversion du temps $B_t \to tB_{1/t}$ permet de passer du comportement en temps court à celui du comportement en temps long. □