Université de Rennes 1 — Master 2 de Mathématiques

Processus stochastiques — année 2015-2016

Contrôle continu # 2

Durée : deux heures, aucun document autorisé.

Question de cours. [4 points]
Donner deux caractérisations distinctes du mouvement brownien réel.

Exercice 1. [6 points]

On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ et la variable aléatoire $Z := \displaystyle\int_0^1 t\, dB_t$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $Z = B_1 - \int_0^1 B_t dt$.
3. En interprétant la dernière intégrale comme une somme de Riemann, montrer que Z est une variable gaussienne, dont on précisera la loi.
4. Montrer que (B_1, Z) est un vecteur gaussien et en déduire $\mathbb{E}[B_1|Z]$.

Exercice 2. [5 points]
On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ et on pose $T := \inf\{t \geq 0,\, |B_t| \geq \sqrt{1+t}\}$.

1. Montrer que T est fini presque sûrement.
2. En utilisant le théorème d'arrêt, montrer que $\mathbb{E}[T] = +\infty$.

Exercice 3. [5 points]
On rappelle que la fonction réciproque asinh de la fonction sinus hyperbolique sinh est donnée par la formule

$$\operatorname{asinh}(x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x).$$

Soient $x \in \mathbb{R}$, $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique vérifiant l'équation

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{1+X_s^2} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds, \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Pour $t \geq 0$, on pose $Y_t := \operatorname{asinh}(X_t)$.

1. À l'aide de la formule d'Itô, montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. En déduire une expression "simple" de Y_t en fonction de B_t.
3. En déduire la nature du processus $(X_t)_{t\geq 0}$: est-il récurrent ou transitoire ?