UNIVERSITÉ DE RENNES 1 — MASTER 2 DE MATHÉMATIQUES
PROCESSUS STOCHASTIQUES — ANNÉE 2015-2016

CONTRÔLE CONTINU # 1

Durée : une heure, aucun document autorisé.

On introduit ici un processus appelé "drap brownien". Il s'agit d'un processus gaussien centré à valeurs réelles, indexé par un ensemble d'indice $T = \mathbb{R}_+^2$ bi-dimensionnel. Ainsi, les trajectoires du processus peuvent être vues comme des surfaces aléatoires, dont voici une illustration.

1. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Gamma((u,s),(v,t)) := \min(u,v) \times \min(s,t) = (u \wedge v) \times (s \wedge t),$$

est une fonction symétrique de type positif.

D'après le cours, il existe alors un processus gaussien centré à valeurs réelles $(\mathbb{B}_{u,s})_{(u,s)\in\mathbb{R}_+^2}$, dont Γ est la fonction de covariance. Ce processus est appelé "drap brownien".

2. Soit G une mesure gaussienne sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2), Leb)$ d'intensité la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^2$. Par analogie avec le cas du mouvement brownien vu en cours, pour $(u,s) \in \mathbb{R}_+^2$, on pose

$$X_{u,s} := G\left(\mathbb{1}_{[0,u]} \times \mathbb{1}_{[0,s]}\right)$$

Montrer que $(X_{u,s})_{(u,s)\in\mathbb{R}_+^2}$ est un drap brownien.

3. Pour (u,s) et (v,t) dans $\mathbb{R}_+^2$, majorer

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_{u,s} - \mathbb{B}_{v,t}|^2\right]$$

en fonction de distance $||(u,s)-(v,t)||_1 = |u-v| + |t-s|$. En déduire que la drap brownien admet une version continue.

4. Montrer que si $(\mathbb{B}_{u,s})_{(u,s)\in\mathbb{R}_+^2}$ est un drap brownien et si $\lambda > 0$, $\mu > 0$, alors le processus changé d'échelle $(\mathbb{B}_{\lambda^2 u, \mu^2 s}/\lambda\mu)_{(u,s)\in\mathbb{R}_+^2}$ est encore un drap brownien.

5. Montrer que si $(\mathbb{B}_{u,s})_{(u,s)\in\mathbb{R}_+^2}$ est un drap brownien et si u est fixé, alors $s \mapsto \mathbb{B}_{u,s}$ est un multiple scalaire d'un mouvement brownien. Autrement dit, les coupes du drap brownien sont des trajectoires d'un mouvement brownien réel.