UNIVERSITÉ RENNES 1 — Master 2 MSB

21 octobre 2010

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
TRAVAUX PRATIQUES - Série 2

Certaines procédures ou fonctions Scilab utiles pour ce TP sont disponibles sur ma page personnelle à l'adresse suivante `http://perso.univ-rennes1.fr/jurgen.angst/enseignements/M2MSB/TP2/`

Exercice 1. *Autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck*
On appelle processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de $x \in \mathbb{R}$, le processus stochastique $(X_t)_{t \geqslant 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dB_t, \\ \\ X_0 = x. \end{cases}$$

1. Écrire une procédure Scilab `procOU(m,h,T,X0)` dont la sortie est la donnée de `m` trajectoires d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de `X0`, sur l'intervalle $[0, \mathtt{T}]$ avec un pas de discrétisation `h`.
2. À l'aide des fonctions `procOU(m,h,T,X0)` et `repartition_empirique`, tracer la fonction de répartition empirique de la variable X_T pour $T = 1, 2, 10$. On pourra superposer aux graphes ci-dessus la fonction de répartititon de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ que l'on obtiendra via la commande `cdfnor("PQ",x,mean,var)`. Que remarquez-vous ?
3. Étant donnés trois réels $a < x < b$, à l'aide de la fonction `procOU(m,h,T,X0)`, écrire une procédure `estisortie` qui estime les probabilités de sortie de l'intervalle $[a, b]$, en a et en b, d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de $X_0 = x$. Comparer avec les valeurs théoriques de ces probabilités obtenues dans la série 2 d'exercices.

Exercice 2. *Modèle de Wright-Fisher*
Dans le modèle de Wright-Fisher, le nombre X^N d'allèles `A` dans une population de N gènes est modélisé par une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par, pour tous i et j dans l'ensemble $\{0, \ldots, N\}$:

$$P_{ij} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Autrement dit, la loi de X_{n+1}^N sachant que $X_n^N = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$. Comment simuler une chaîne de Markov avec Scilab ? Il a essentiellement deux possibilités :

- On peut définir la matrice de transition P puis utiliser la fonction `grand(n, ''markov'', P, i)` qui génère automatiquement les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sachant que $X_0 = i$;
- On peut également générer pas à pas X_{n+1} à partir de X_n en utilisant par exemple la fonction `grand(1, 1, ''bin'', N, i/N)`.

1. Représenter plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour $N = 10, 20, 100$.
2. Confronter l'estimation numérique de la probabilité que la chaîne soit absorbée en N au résultat théorique vu en cours pour $N = 10, 20, 100$.
3. Proposer une estimation de l'espérance du temps de d'absorption de la chaîne pour $N = 10, 20, 100$.