UNIVERSITÉ RENNES 1

Master 2 MSB
06 octobre 2010

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
TRAVAUX PRATIQUES - Série 1

Certaines procédures ou fonctions Scilab utiles pour ce TP sont disponibles sur ma page personnelle à l'adresse suivante `http://perso.univ-rennes1.fr/jurgen.angst/enseignements/M2MSB/TP1/`.

Exercice 1. *Autour de la marche aléatoire simple*

On rappelle qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ issue de $x \in \mathbb{Z}$, est une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires telles que $S_0 = x$ et $S_n = x + \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geqslant 1$, où $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, de loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = p \in [0, 1]$.

1. Écrire une procédure Scilab `marche(m,n,p)` dont les arguments sont deux entiers strictement positifs m et n, un réel $p \in [0, 1]$, et qui renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les m lignes sont des réalisations indépendantes d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ issue de zéro, de longueur n.

2. *Ruine du joueur.* On se donne deux entiers $0 < k < N$. Estimer la probabilité qu'une marche symétrique issue de k atteigne zéro avant d'atteindre N.

3. Lorsque $p \neq 1/2$, illustrer la divergence en probabilité de la trajectoire et estimer sa vitesse de divergence (penser à la loi des grands nombres).

4. Dans le cas symétrique, *i.e.* lorsque $p = 1/2$, représenter de longues trajectoires de la marche. La marche passe-t-elle souvent par zéro ou observe-t-on de longues excursions strictement positives ou négatives ?

5. *Loi de l'arcsinus.* On note $T_n := \mathrm{Card}\{k,\ 0 \leqslant k < n,\ S_k > 0 \text{ ou } S_{k+1} > 0\}$ le nombre de pas de le marche situés au-dessus de l'axe des abscisses lors d'une excursion de longueur n. On montre que la proportion de temps passée au dessus de l'axe converge vers une variable aléatoire dont la loi est celle de l'arcsinus :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_n}{n} \leqslant x\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin(x)$$
Illustrer cette convergence en traçant sur un même graphique la fonction de répartition empirique de T_n/n et ainsi que la fonction arcsinus. On pourra utiliser la fonction `repartition_empirique` disponible en ligne.

   Si on prend par exemple $x = 1/5$, cette probabilité est de l'ordre de 1/5. Autrement dit, il y a donc une chance sur cinq pour que la courbe passe plus des quatre cinquièmes du temps au-dessus de l'axe des abscisses entre deux passages par zéro.

Exercice 2. *Marche aléatoire à boucles effacées*

On rappelle l'algorithme qui à partir d'une réalisation de la marche aléatoire simple $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ en dimension deux, fournit son analogue à boucles effacées :

$$\begin{cases} \text{on initialise } i_0 = \max\{i,\ S_i = S_0\}, \\ \text{puis tant que } S_{i_j} \neq S_n, \text{ on pose} \\ \qquad i_{j+1} = \max\{i, S_i = S_{i_j}\} + 1, \\ \text{enfin, on pose } J = \min\{j, S_{i_j} = S_n\}. \end{cases}$$

La marche à boucles effacées est alors donnée par $LE(S) := (S_{i_0}, S_{i_0}, \dots, S_{i_J})$.

1. Écrire une fonction `marche2(n)` qui étant donné l'entier n renvoie les coordonnées d'une marche aléatoire symétrique en dimension deux, issue de zéro et de longueur n.

2. Écrire une procédure qui, à partir d'une réalisation de la fonction `marche2`, renvoie lez coordonnées de la marche à boucles effacées correspondante.

3. Représenter sur une même figure une réalisation de la marche aléatoire simple et de sa version à boucles effacées.

4. Que peut-on dire de la longueur de la trajectoire à boucles effacées comparée à celle de la trajectoire initiale ?

Exercice 3. *Limite d'échelle des marches aléatoires*

Étant donnée une marche aléatoire symétrique en dimension deux issue de zéro, le théorème limite central nous indique que la distance à l'origine du $n-$ième lieu de la marche est de l'ordre de $\sqrt{n}$

1. Pour vous en convaincre, représentez graphiquement des réalisations d'une marche aléatoire symétrique en dimension deux, issue de zéro et de longueur n, ainsi que le cercle centré en zéro et de rayon $\sqrt{n}$;

   Ceci indique que pour observer la marche à bonne échelle (*i.e.* dans une fenêtre de taille fixe), il faut faire un zoom arrière de l'ordre $\sqrt{n}$ sur la figure précédente. Aussi, on introduit le processus changé d'échelle
$$(Z_t^n)_{t\in[0,1]} := (X_t^n, Y_t^n)_{t\in[0,1]} = \left(\frac{S^1_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{n}}, \frac{S^2_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t\in[0,1]}.$$
   Nous verrons dans le cours que lorsque n tend vers l'infini, les processus $(Z_t^n)_{t\in[0,1]}$ converge (en loi) vers un processus $(B_t)_{t\in[0,1]} = (B_t^1, B_t^2)_{t\in[0,1]}$ appelé *mouvement brownien*. Ce dernier décrit de façon très fidèle le mouvement des particules de pollen dans l'eau envisagé dans le premier cours.

2. Soit $c > 0$. D'après la définition ci-dessus du mouvement brownien comme limite d'échelle de la marche aléatoire renormalisée, que peut-on dire du processus $\left(\frac{1}{c}B_{c^2t}\right)_{t\in[0,1]}$?

   On dit que le mouvement brownien est auto-similaire, la géométrie très irrégulière de la courbe brownienne est un exemple typique de géométrie fractale.

3. À partir des procédures introduites dans l'exercice deux, tracer une trajectoire de la marche aléatoire à boucles effacées (on note N la longueur de la trajectoire) ainsi que les cercles de rayon $\sqrt{N}$ et $N^{4/5}$ centrés en l'origine. Quel est le cercle qui semble le mieux approcher la distance typique entre l'origine et la fin de la marche ?

   On montre que pour une marche à boucles effacées, la distance typique est bien de l'ordre de $N^{4/5}$, contrairement au cas d'une marche simple où elle est de l'ordre $\sqrt{N}$. La limite d'échelle de la marche à boucles effacées n'est pas le mouvement brownien mais un autre processus appelée SLE (pour Schramm-Loewner-Evolution) d'indice 2.

   En ce qui concerne la marche auto-évitante, on ne sait pas (pour le moment) expliciter rigoureusement sa limite d'échelle, cependant on conjecture qu'il s'agit également d'un processus SLE, cette fois d'indice 8/3.