
MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 3 bis

Exercice 1. *Arbre binaire aléatoire*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 2\}$ dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(X = 0) =: p$ et $\mathbb{P}(X = 2) =: q = 1 - p$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X . On note Z_n le nombre d'individus à la n -ième génération, autrement dit on a $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$ pour $n \geq 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k \geq 1, n \geq 0}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X .

1. Calculer la fonction génératrice $G_X(s)$ de la variable X . En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$.
2. Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$ le nombre moyen d'individus à la génération n ?

Exercice 2. *Exemple de processus de Galton-Watson*

Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction X , où

$$\mathbb{P}(X = 0) = \alpha, \text{ et pour } k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = (1 - \alpha)(1 - \beta)\beta^{k-1}$$

avec $0 < \alpha < \beta < 1$.

1. Calculer $\mu = \mathbb{E}[X]$, vérifier que $\mu > 1$ et calculer π la probabilité d'extinction du processus.
2. On note G la fonction génératrice de la variable X . Vérifier que

$$\frac{G(z) - 1}{G(z) - \pi} = m \frac{z - 1}{z - \pi}.$$

En déduire l'expression $G_n(z) = G \circ \dots \circ G(z)$.

3. Montrer que la suite $(Z_n/\mu^n, n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

Exercice 3. *Arbre poissonien et modèle de Wright-Fisher*

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Quelle est la loi de la variable $X_1 + X_2$?
2. En déduire la loi de la somme de n variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
3. Soit $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que conditionnellement au fait que Z_n est constant égal à N , la répartition des descendants de chaque individu suit une loi multinomiale de paramètres $(N, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$, autrement dit si D_i est le nombre de descendants de l'individu i et si $k_1 + k_2 + \dots + k_N = N$:

$$\mathbb{P}(D_1 = k_1, \dots, D_N = k_N) = \frac{N!}{k_1! \dots k_N!} \left(\frac{1}{N}\right)^N.$$

Exercice 4. *Population totale dans un arbre de Galton-Watson*

Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction X . On pose $\mu := \mathbb{E}[X]$. On considère la variable $Y = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$ i.e. la population totale de l'arbre et on note G_Y sa fonction génératrice. La variable aléatoire Y est finie si et seulement si le temps T d'extinction du processus l'est.

1. Déterminer l'espérance de Y lorsque $\mu < 1$.
2. Montrer que la fonction G_Y est solution de l'équation fonctionnelle $G_Y(s) = s \times G_X(G_Y(s))$.
3. Expliciter cette solution dans le cas où $p_0 + p_2 = 1$. En déduire dans ce cas la loi de Y .