
MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 3

Exercice 1. *Autour des fonctions génératrices*

On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs entières, sa fonction génératrice G_X est définie par $G_X(s) := \mathbb{E}[s^X]$ pour $s \in [0, 1]$.

1. Calculer la fonction génératrice d'une variable de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes à valeurs entières alors on a la relation $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$, retrouver ainsi les moyennes des lois ci-dessus.

Exercice 2. *Itération d'une homographie*

D'après l'exercice précédent, la fonction génératrice d'une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ est donnée par $G(s) = \frac{p}{1-qs}$ où l'on a posé $q = 1 - p$. On souhaite déterminer l'expression de la n -ième itérée de la fonction G , i.e. $G_n := G \circ G \circ \dots \circ G$.

1. On suppose tout d'abord que $p = 1/2$. Trouver les solutions de l'équation $G(s) = s$.
2. Exprimer $\frac{1}{G(s) - 1}$ en fonction de $\frac{1}{s - 1}$.
3. En déduire que $\frac{1}{G_n(s) - 1} = \frac{1}{s - 1} - n$ puis $G_n(s) = \frac{n - (n - 1)s}{(n + 1) - ns}$.
4. Lorsque $p \neq 1/2$, on montre que

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 1 \end{pmatrix}^n = (q - p)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$G_n(s) = \frac{pq^n(1 - s) + p^nq - p^{n+1}}{q^{n+1}(1 - s) + qp^n s - p^{n+1}} = \frac{\mu^n(1 - s) + \mu s - 1}{\mu^{n+1}(1 - s) + \mu s - 1}.$$

Exercice 3. *Un exemple d'arbre de Galton-Watson*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 2\}$ dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(X = 0) =: p$ et $\mathbb{P}(X = 2) =: q = 1 - p$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X . On note Z_n le nombre d'individus à la n -ième génération, autrement dit on a $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$ pour $n \geq 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k \geq 1, n \geq 0}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X .

1. Calculer la fonction génératrice $G_X(s)$ de la variable X . En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$.
2. Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$ le nombre moyen d'individus à la génération n ?