UNIVERSITÉ RENNES 1 Master 2 MSB

Semestre automne 2011

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices corrigés - Série 4

Exercice 1. *Autour des diffusions*

1. Calculer la fonction d'échelle et la mesure de vitesse du mouvement brownien avec dérive, solution de léquation $X_t = bt + \sigma W_t$, où b et σ sont deux constantes. En déduire les probabilités de sortie de l'intervalle $[0, 1]$.

   Par définition, on a $dX_t = bdt + \sigma dW_t$ avec $b(x) \equiv b$ et $\sigma(x) \equiv \sigma$. D'après le cours, on a et
   $$S(x) = \int_c^x e^{-\frac{2b}{\sigma^2}(y-c)} dy = \left[\frac{-\sigma^2}{2b} e^{-\frac{2b}{\sigma^2}(y-c)} \right]_c^x = \frac{\sigma^2}{2b} \left(1 - e^{-\frac{2b}{\sigma^2}(x-c)} \right),$$
   et d'autre part :
   $$\mu(dx) = \frac{2}{S'(x)\sigma^2(x)} dx = \frac{2}{\sigma^2} e^{\frac{2b}{\sigma^2}(x-c)} dx.$$
   En particulier, on a $\int \mu = +\infty$ et le processus est transient. Toujours d'après le cours, on a
   $$\mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 0) = \frac{S(1) - S(x)}{S(1) - S(0)}, \text{ et } \mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 1) = \frac{S(x) - S(0)}{S(1) - S(0)}.$$
   Dans le cas du brownien avec dérive, en posant $d = \frac{2b}{\sigma^2}$, on trouve :
   $$\mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 0) = \frac{e^{-dx} - e^{-d}}{1 - e^{-d}}, \text{ et } \mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 1) = \frac{1 - e^{-dx}}{1 - e^{-d}}.$$

2. Calculer la fonction d'échelle et la mesure de vitesse du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ avec $\sigma(x) = 1$ et $b(x) = -\lambda x$.

   Par définition, on a $dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t$. D'après le cours, on a $-2b/\sigma^2(x) = 2\lambda x$ et
   $$S(x) = \int_c^x e^{\lambda(y^2-c^2)} dy, \text{ et } \mu(dx) = \frac{2}{S'(x)\sigma^2(x)} dx = 2e^{-(x^2-c^2)} dx.$$
   En particulier, on a $\int \mu < +\infty$ et le processus est récurrent.

Exercice 2. *Vers le modèle de Wright-Fisher*
On condidère la diffusion X_t solution de l équation $dX_t = X_t(1 - X_t)dB_t$. Calculer les probabilités et les temps de sortie de l'intervalle $[0, 1]$.

On a ici $b(x) \equiv 0$ donc d'après le cours
$$S(x) = x - c, \text{ et } \mu(dx) = \frac{2}{x(1-x)} dx.$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 0) = 1 - x, \text{ et } \mathbb{P}_x(X_{T_{0,1}} = 1) = x.$$
D'autre part, en appliquant la formule du cours pour le temps moyen de sortie, on obtient
$$\mathbb{E}_x[T_{0,1}] = -2 \left(x \log(x) + (1 - x) \log(1 - x) \right).$$