UNIVERSITÉ RENNES 1 | Master 2 MSB
Semestre automne 2011

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 3

Exercice 1. *Première loi de l'arcsinus*
On se donne deux entiers $0 < k < N$. On souhaite calculer la probabilité $p_{2N}(2k)$ qu'une marche symétrique issue de 0 passe un temps $2k$ au dessus de l'axe des abscisses entre les temps 0 et $2N$. On désigne par q_{2r} la probabilité que la marche issue de zéro revienne en zéro pour la première fois au temps $2r$.

1. Montrer que l'on a la relation
$$p_{2N}(2k) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} q_{2r}p_{2N-2r}(2k-2r) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N-k} q_{2r}p_{2N-2r}(2k).$$
2. Par récurrence, montrer que $p_{2N}(2k) = p_{2N}(0)p_{2N-2k}(0)$.
3. En déduire que
$$p_{2N}(2k) = \frac{1}{2^{2N}}\binom{2k}{k}\binom{2N-2k}{N-k}.$$

Exercice 2. *Théorème du scrutin*
Soit $b > 0$ un entier. On note $N_n(a, b)$ le nombre de chemins admissibles pour une marche simple de $(0, a)$ à (n, b), et $N_n^0(a, b)$ le nombre de tels chemins qui passent par zéro.

1. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, b) qui ne touchent pas l'axe des abscisses est $N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}(-1, b)$;
2. En déduire que ce nombre est égal à $\frac{b}{n}N_n(-1, b)$

Exercice 3. *Non retour en zéro*
On considère S une marche simple symétrique unidimensionnelle issue de zéro.

1. Pour tout entier b, montrer que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b);$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n|);$$
3. En utilisant le fait que $\frac{2k}{2n}\binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$, en déduire que d'autre part que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$