UNIVERSITÉ RENNES 1 Master 2 MSB
Semestre automne 2011

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 2

Exercice 1. *Lois géométriques et exponentielles*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si pour tout $k \geqslant 1$: $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si pour tout $t \geqslant 0$: $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$.

1. Montrer qu'une variable $X \sim \mathcal{G}(p)$ vérifie la propriété d'absence de mémoire, pour $k, \ell \geqslant 1$:
$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de lois $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ où la suite p_n est telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que la suite $Y_n = X_n/n$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi exponentielle $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 2. *Fonctions génératrices*
On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs entières, sa fonction génératrice g_X est définie par $g_X(s) := \mathbb{E}[s^X]$ pour $s \in [0,1]$.

1. Calculer la fonction génératrice d'une variable de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes à valeurs entières alors on a la relation $g_{X+Y} = g_X \times g_Y$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[X] = g'_X(1)$, retrouver ainsi les moyennes des lois ci-dessus.

Exercice 3. *Exemple d'arbre de Galton-Watson I*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,2\}$ dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}(X = 0) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 2) = q = 1 - p.$$
On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X. On note Z_n le nombre d'individus à la $n-$ième génération, autrement dit on a $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$ pour $n \geqslant 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k\geqslant 1, n\geqslant 0}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X.

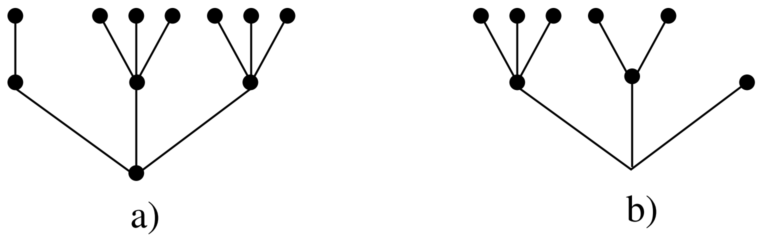
1. Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$ le nombre moyen d'individus à la génération n ?
2. Calculer la fonction génératrice $g_X(s)$ de la variable X. En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$.

   Indice : on rappelle que la probabilité d'extinction est l'unique nombre s_0 dans $]0,1[$ solution de l'équation $g_X(s) = s$.

Exercice 4. *Exemple d'arbre de Galton-Watson II*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble $\{0,1,3\}$ dont la loi est donnée par : $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=3)=1/3$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X. On note Z_n le nombre d'individus à la $n-$ième génération, autrement dit on a $Z_0=1$ et $Z_{n+1}=\sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$ pour $n \geqslant 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k\geqslant 1, n\geqslant 0}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X.

1. Dans la figure ci-après, un seul des deux arbres est une réalisation possible d'arbre $\mathcal{T}$ à la deuxième génération, lequel et pourquoi ? Tracer la fonction de hauteur correspondante.



2. Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$ le nombre moyen d'individus à la génération n ?
3. Calculer la fonction génératrice $g_X(s)$ de la variable X. En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$.
4. À l'aide de la loi des grands nombres, déterminer la limite du rapport Z_{n+1}/Z_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5. *Arbre de Galton-Watson uniforme*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ de loi uniforme :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{4}.$$

On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X. On note Z_n le nombre d'individus à la $n-$ième génération, autrement dit on a $Z_0=1$ et $Z_{n+1}=\sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$ pour $n \geqslant 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k\geqslant 1, n\geqslant 0}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X.

1. Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$ le nombre moyen d'individus à la génération n ?
2. Calculer la fonction génératrice $g_X(s)$ de la variable X. En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$.
3. Étudier le cas où X suit la loi uniforme sur $\{0,1,2,\ldots,N\}$.