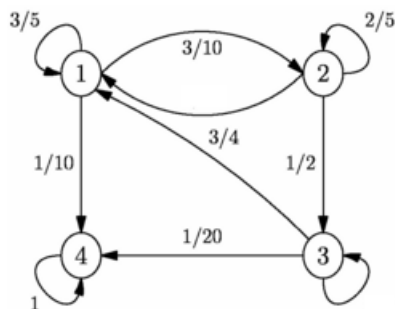

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 1

Exercice 1. *Un exemple de chaîne de Markov*

On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans les entiers compris entre 1 et 4 et dont les probabilités de transition sont résumées schématiquement dans le graphique ci-contre.

1. Donner la matrice de transition de la chaîne.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 2)$.

Exercice 2. *Chaîne de Markov à deux états*

Soient $a, b \in]0, 1[$. Sur l'ensemble $\{0, 1\}$, on considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P := \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ pour P , *i.e.* telle que $\pi P = \pi$, et la calculer.
2. On pose $\lambda := 1 - a - b$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la puissance n -ième de P est donnée par

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}\lambda^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\lambda^n \end{pmatrix}.$$

3. On suppose maintenant que $a = b = 1$. Calculer P^n et commenter.

Exercice 3. *Lois géométriques et exponentielles*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si pour tout $k \geq 1$: $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si pour tout $t \geq 0$: $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$.

1. Montrer qu'une variable $X \sim \mathcal{G}(p)$ vérifie la propriété d'absence de mémoire, pour $k, \ell \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires de lois $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ où la suite p_n est telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que la suite $Y_n = X_n/n$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi exponentielle $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.