UNIVERSITÉ RENNES 1 Master 2 MSB

Semestre automne 2011

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Correction des exercices - Série 3

Exercice 1. $\pm$ *vu en cours*

Exercice 2. *Théorème du scrutin*

1. Comme $b > 0$, les chemins qui ne passent pas par zéro vérifient nécéssairement $S_1 = 1$. On est donc ramené à des chemins de longueurs $n-1$ issus de 1. Le nombre de chemins qui ne touchent pas l'axe est obtenu comme la différence entre le nombre de chemins total et le nombre de chemins qui touchent l'axe, c'est-à-dire $N_n(1,b) - N_n^0(1,b)$. D'après le principe de réflexion, on a $N_n^0(1,b) = N_n(-1,b)$, d'où le résultat.

2. D'après le cours, on a
$$N_n(1,b) - N_n(-1,b) = \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}} = \binom{n}{\frac{n+b}{2}} \times \frac{1}{n} \times \left[\frac{n+b}{2} - \frac{n-b}{2}\right] = \frac{b}{n}\binom{n}{\frac{n+b}{2}},$$
c'est-à-dire $N_n(1,b) - N_n(-1,b) = \frac{b}{n} N_n(0,b)$

Exercice 3. *Non retour en zéro*
On considère S une marche simple symétrique unidimensionnelle issue de zéro.

1. Pour $b > 0$, d'après le théorème du scrutin, on a
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\frac{N_n(0,b)}{2^n},$$
c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$
Le cas où $b < 0$ se traite de manière analogue.

2. En faisant la somme sur b, on obtient alors
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\sum_{b\in\mathbb{Z}} |b| \times \mathbb{P}(S_n = b) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n|).$$

3. Comme lorsque k varie, les évènements $\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_{2n} = 2k\}$ sont disjoints, la probabilité recherché sécrit comme la somme

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_{2n} \neq 0) &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) \\
&= \frac{2}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \\
&= \mathbb{P}(S_{2n} = 0).
\end{aligned}$$