
MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Correction des exercices - Série 2

Exercice 1. *Lois géométriques et exponentielles*

1. Tout d'abord, pour $m \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^m \sum_{k'=0}^{+\infty} (1-p)^{k'} = (1-p)^m.$$

Ensuite, par définition de la probabilité conditionnelle, pour $k, \ell \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell \text{ et } X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell)}{\mathbb{P}(X > k)} \\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = \mathbb{P}(X > \ell). \end{aligned}$$

2. Par définition, pour tout réel strictement positif t , on a

$$\mathbb{P}(Y_n > t) = \mathbb{P}(X_n/n > t) = \mathbb{P}(X_n > nt) = (1-p_n)^{nt}.$$

Or lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} (1-p_n)^{nt} &= \exp(nt \times \log(1-p_n)) = \exp\left[nt \times \log\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[nt \times \left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{-\lambda t + o(1)}. \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n > t) = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(Y > t)$ où $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, d'où le résultat.

Exercice 2. *Fonctions génératrices*

On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs entières, sa fonction génératrice g_X est définie par $g_X(s) := \mathbb{E}[s^X]$ pour $s \in [0, 1]$.

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $g_X(s) = q + ps$ avec $q = 1 - p$. Comme une variable de binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ peut être interprétée comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes $X = X_1 + \dots + X_n$, on a naturellement $g_X(s) = (q + ps)^n$. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$ alors $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ et $g_X(s) = p \sum_{k=0}^{+\infty} (qs)^k = p/(1-qs)$. Enfin, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $g_X(s) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s)^k / k! = e^{-\lambda(1-s)}$.
- Si X et Y sont deux variables indépendantes à valeurs entières alors on a la relation

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X) \mathbb{E}(s^Y) = g_X(s) \times g_Y(s).$$

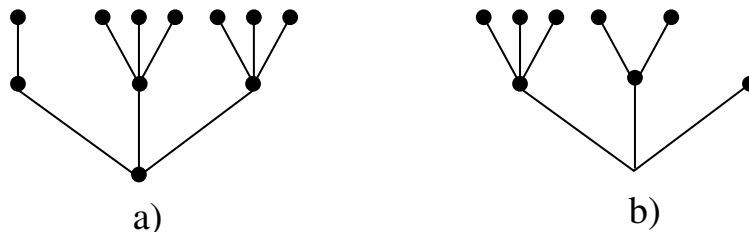
- Voir le cours.

Exercice 3. *Exemple d'arbre de Galton-Watson I*

1. On a $\mathbb{E}(X) = 2q$ donc d'après le cours $\mathbb{E}[Z_n] = (2q)^n$.
2. La fonction génératrice de X est $g_X(s) = p + qs^2$. En déduire la probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$ est l'unique nombre s_0 dans $]0, 1[$ solution de l'équation $g_X(s) = s$, c'est-à-dire ici $s^2 - s/q + p/q = (s - 1)(s - p/q) = 0$. La solution est $s_0 = p/q$.

Exercice 4. *Exemple d'arbre de Galton-Watson II*

1. Dans la figure ci-après, l'arbre b) ne peut-être une réalisation de l'arbre de loi de reproduction X car à la première génération, un des fils a 2 descendants et $2 \notin \{0, 1, 3\}$.



2. On a $\mathbb{E}(X) = 4/3$ donc $\mathbb{E}[Z_n] = (4/3)^n$.
3. On a $g_X(s) = 1/3 \times (1 + s + s^3)$. La probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$ est l'unique nombre s_0 dans $]0, 1[$ solution de l'équation $g_X(s) = s$, c'est-à-dire ici :

$$1 + s + s^3 = 3s \Leftrightarrow s^3 - 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow (s - 1)(s^2 + s - 1) \Rightarrow s_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4. Presque sûrement, on a $Z_n \rightarrow +\infty$, alors d'après la loi des grands nombres :

$$\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \frac{1}{Z_n} \sum_{k=1}^{Z_n} X_k \rightarrow \mathbb{E}(X) = 4/3.$$

Exercice 5. *Arbre de Galton-Watson uniforme*

1. On a $\mathbb{E}(X) = 3/2$ donc $\mathbb{E}[Z_n] = (3/2)^n$.
2. La fonction génératrice de X est $g_X(s) = 1/4 \times (1 + s + s^2 + s^3)$ La probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$ est l'unique nombre s_0 dans $]0, 1[$ solution de l'équation $g_X(s) = s$, c'est-à-dire ici :

$$1 + s + s^2 + s^3 = 4s \Leftrightarrow s^3 - s^2 - 3s + 1 = 0 \Leftrightarrow (s - 1)(s^2 + 2s - 1) \Rightarrow s_0 = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}.$$