
MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Correction des exercices - Série 1

Exercice 2. *Chaîne de Markov à deux états*

1. Trouver la mesure invariante π revient à résoudre le système d'équations $(x, y)P = (x, y)$ sous la contrainte $x + y = 1$. On trouve facilement l'unique solution de ce système :

$$\begin{cases} (x, y)P = (x, y) \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a)x + by = x \\ ax + (1-b)y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} ax = by \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{b}{a+b} \\ y = \frac{a}{a+b} \end{cases}.$$

On conclut que $\pi = (\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$.

2. Il suffit de raisonner par récurrence sur n .
3. Lorsque $a = b = 1$, la chaîne est périodique de période 2 et n'est donc pas convergente.

Exercice 3. *Lois géométriques et exponentielles*

1. Tout d'abord, pour $m \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^m \sum_{k'=0}^{+\infty} (1-p)^{k'} = (1-p)^m.$$

Ensuite, par définition de la probabilité conditionnelle, pour $k, \ell \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell \text{ et } X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell)}{\mathbb{P}(X > k)} \\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = \mathbb{P}(X > \ell). \end{aligned}$$

2. Par définition, pour tout réel strictement positif t , on a

$$\mathbb{P}(Y_n > t) = \mathbb{P}(X_n/n > t) = \mathbb{P}(X_n > nt) = (1 - p_n)^{nt}.$$

Or lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} (1 - p_n)^{nt} &= \exp(nt \times \log(1 - p_n)) = \exp\left[nt \times \log\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[nt \times \left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{-\lambda t + o(1)}. \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n > t) = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(Y > t)$ où $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, d'où le résultat.