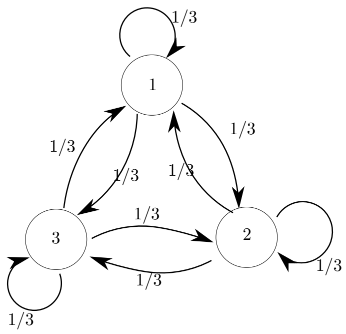
UNIVERSITÉ RENNES 1

Master 2 MSB
Semestre automne 2011

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Contrôle des connaissances

Questions de cours : voir cours

Exercice 1. *Chaîne de Markov à trois états*



On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$ et dont les probabilités de transition sont résumées dans le graphe ci-contre.

1. La matrice de transition est la matrice 3×3 dont toutes les entrées sont égales à $1/3$.On vérifie que $P^2=P$ et par suite $P^n=P$ pour tout $n\geqslant 1$.
2. On résout le système linéaire qui admet pour unique solution $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(1/3,1/3,1/3)$.

Exercice 2. *Exemple d'arbre de Galton-Watson*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X=0)=1/6,\qquad \mathbb{P}(X=1)=1/6,\qquad \mathbb{P}(X=2)=1/3,\qquad \mathbb{P}(X=1)=1/3.$$

On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la loi de X. On note Z_n le nombre d'individus à la $n-$ième génération, autrement dit on a $Z_0=1$ et $Z_{n+1}=\sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1}$ pour $n\geqslant 0$, où les variables $(X_{k,n})_{k\geqslant 1,n\geqslant 1}$ sont indépendantes et de même loi que la variable X.

1. On a $\mathbb{E}(X)=11/6$ donc $\mathbb{E}[Z_n]=(11/6)^n$.
2. La fonction génératrice de X est $g_X(s)=1/6\times(1+s+2s^2+2s^3)$. La probabilité d'extinction de l'arbre $\mathcal{T}$ est l'unique nombre s_0 dans $]0,1[$ solution de l'équation $g_X(s)=s$, c'est-à-dire ici :

$$(1+s+2s^2+2s^3)=6s\Leftrightarrow 2s^3+2s^2-5s+1=0\Leftrightarrow 2(s-1)\left(s^2+2s-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow s_0=\frac{\sqrt{6}-2}{2}.$$

Exercice 3. *Arbre de Galton-Watson binomial*

1. On a $\mathbb{E}(X)=2p$ donc l'arbre critique, sous-critique, sur-critique selon que $p=,<,>1/2$.
2. On a $g_X(s)=(q+ps)^2$ avec $q=1-p$. Dans le cas sur-critique, *i.e.* lorsque $p>1/2$, la probabilité d'extinction est l'unique nombre s_0 dans $]0,1[$ solution de l'équation $g_X(s)=s$, c'est-à-dire ici :

$$(q+ps)^2=s\Leftrightarrow s^2+\frac{2pq-1}{p^2}s+\frac{q^2}{p^2}=0\Leftrightarrow (s-1)\left(s-\frac{q^2}{p^2}\right)=0\Rightarrow s_0=\frac{q^2}{p^2}.$$