UNIVERSITÉ RENNES 1

Master 2 MSB
Semestre automne 2010

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 2

Exercice 1. *Chaîne de Markov à deux états*
Soient $a, b \in]0,1[$. Sur l'ensemble $\{0,1\}$, on considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P := \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ pour P, *i.e.* telle que $\pi P = \pi$, et la calculer.
2. On pose $\lambda := 1 - a - b$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la puissance $n-$ième de P est donnée par

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}\lambda^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}\lambda^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\lambda^n \end{pmatrix}.$$

3. On suppose maintenant que $a = b = 1$. Calculer P^n et commenter.

Exercice 2. *Autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck*
On appelle processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de $x \in \mathbb{R}$, le processus stochastique $(X_t)_{t\geqslant 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

1. Calculer la fonction d'échelle S et la mesure de vitesse m associées au processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
2. En déduire les probabilités de sortie de l'intervalle $[a, b]$, en a et en b, d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu de $X_0 = x \in [a, b]$.

Exercice 3. *Lois géométriques et exponentielles*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si pour tout $k \geqslant 1$: $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si pour tout $t \geqslant 0$: $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$.

1. Montrer qu'une variable $X \sim \mathcal{G}(p)$ vérifie la propriété d'absence de mémoire, pour $k, \ell \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de lois $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ où la suite p_n est telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que la suite $Y_n = X_n/n$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi exponentielle $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.