UNIVERSITÉ RENNES 1 — Master 2 MSB
Semestre automne 2010

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Correction des exercices - Série 2

Exercice 1. *Chaîne de Markov à deux états*

1. Trouver la mesure invariante π revient à résoudre le système d'équations $(x,y)P=(x,y)$ sous la contrainte $x+y=1$. On trouve facilement l'unique solution de ce système :

$$\left\{\begin{array}{l}(x,y)P=(x,y)\\ \\ x+y=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(1-a)x+by=x\\ \\ ax+(1-b)y=y\\ \\ x+y=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}ax=by\\ x+y=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=\frac{b}{a+b}\\ y=\frac{a}{a+b}\end{array}\right. .$$

On conclut que $\pi=(\pi_1,\pi_2)=\left(\frac{b}{a+b},\frac{a}{a+b}\right)$.

2. Il suffit de raisonner par récurrence sur n.

3. Lorsque $a=b=1$, la chaîne est périodique de période 2 et n'est donc pas convergente.

Exercice 2. *Autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck*

1. Le processus est solution de l'équation $dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t$ avec $b(x)=-x$ et $\sigma\equiv\sqrt{2}$. On a alors $-2b(z)/\sigma^2(z)=z$ et pour $c\in\mathbb{R}$: $\int_c^y \frac{-2b(z)}{\sigma^2(z)}dz=\frac{y^2-c^2}{2}$. On en déduit :

$$S(x):=\int_c^x \exp\left(\int_c^y \frac{-2b(z)}{\sigma^2(z)}dz\right)dy=e^{-c^2/2}\int_c^x e^{y^2/2}dy,$$

$$m(dx):=\frac{2}{S'(x)\sigma^2(x)}dx=e^{c^2/2}e^{-x^2/2}dx.$$

2. D'après le cours, on a alors $\mathbb{P}_x\big(X_{T_{a,b}}=a\big)=\frac{S(b)-S(x)}{S(b)-S(a)}$ et $\mathbb{P}_x\big(X_{T_{a,b}}=b\big)=\frac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}$, soit

$$\mathbb{P}_x\big(X_{T_{a,b}}=a\big)=\frac{\int_x^b e^{y^2/2}dy}{\int_a^b e^{y^2/2}dy},\quad \mathbb{P}_x\big(X_{T_{a,b}}=b\big)=\frac{\int_a^x e^{y^2/2}dy}{\int_a^b e^{y^2/2}dy}.$$

Exercice 3. *Lois géométriques et exponentielles*

1. Tout d'abord, pour $m\geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(X>m)=\sum_{k=m+1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}=p(1-p)^m\sum_{k'=0}^{+\infty}(1-p)^{k'}=(1-p)^m.$$

Ensuite, par définition de la probabilité conditionnelle, pour $k,\ell\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k+\ell\mid X>k) &= \frac{\mathbb{P}(X>k+\ell \text{ et } X>k)}{\mathbb{P}(X>k)}=\frac{\mathbb{P}(X>k+\ell)}{\mathbb{P}(X>k)}\\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k}=(1-p)^\ell=\mathbb{P}(X>\ell).\end{aligned}$$

2. Par définition, pour tout réel strictement positif t, on a

$$\mathbb{P}(Y_n > t) = \mathbb{P}(X_n/n > t) = \mathbb{P}(X_n > nt) = (1 - p_n)^{nt}.$$

Or lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\begin{aligned}(1 - p_n)^{nt} &= \exp\left(nt \times \log\left(1 - p_n\right)\right) = \exp\left[nt \times \log\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[nt \times \left(-\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{-\lambda t + o(1)}.\end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n > t) = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(Y > t)$ où $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, d'où le résultat.