MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Exercices - Série 1

Exercice 1. *Ruine du joueur*
On se donne deux entiers $0 < k < N$. On souhaite calculer la probabilité qu'une marche symétrique issue de k touche l'axe des abscisses avant d'atteindre l'altitude N. On note A_k cet évènement et on pose $p_k = \mathbb{P}(A_k)$.

1. Montrer que l'on a la relation $p_k = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})$ pour $0 < k < N$.
2. Quelles sont les valeurs de p_0 et p_N ? En utilisant ces valeurs, montrer que $p_k = 1 - k/N$.
3. Dans le cas d'une marche asymétrique, *i.e.* lorsque $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p$, on a plus généralement $p_k = q\, p_{k-1} + p\, p_{k+1}$ pour $0 < k < N$ avec $p_0 = 1$ et $p_N = 0$. Montrer qu'alors
$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

Exercice 2. *Théorème du scrutin*
Soit $b > 0$ un entier. On note $N_n(a, b)$ le nombre de chemins admissibles pour une marche simple de $(0, a)$ à (n, b), et $N_n^0(a, b)$ le nombre de tels chemins qui passent par zéro.

1. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, b) qui ne touchent pas l'axe des abscisses est $N_n(1, b) - N_n(-1, b)$;
2. En déduire que ce nombre est égal à $\frac{b}{n} N_n(0, b)$

Exercice 3. *Non retour en zéro*
On considère S une marche simple symétrique unidimensionnelle issue de zéro.

1. Pour tout entier b, montrer que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b);$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n|);$$
3. En utilisant le fait que $\frac{2k}{2n}\binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$, en déduire que d'autre part que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$