UNIVERSITÉ RENNES 1 Master 2 MSB
Semestre automne 2010

MODÈLES ALÉATOIRES EN BIOLOGIE
Correction des exercices - Série 1

Exercice 1. *Ruine du joueur*

1. On fixe k entre zéro et N strictement. Pour obtenir la relation, il suffit de conditionner par le premier pas de la marche. On a ainsi

$$p_k = \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k \mid S_1 = -1)\mathbb{P}(S_1 = -1) + \mathbb{P}(A_k \mid S_1 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1),$$

soit quand la marche est symétrique :

$$p_k = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(A_k \mid S_1 = -1) + \mathbb{P}(A_k \mid S_1 = 1)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(A_{k-1}) + \mathbb{P}(A_{k+1})\right) = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1}),$$

ou plus généralement quand la marche est asymétrique :

$$p_k = q\,\mathbb{P}(A_k \mid S_1 = -1) + q\,\mathbb{P}(A_k \mid S_1 = 1) = q\,\mathbb{P}(A_{k-1}) + q\,\mathbb{P}(A_{k+1}) = q\,p_{k-1} + p\,p_{k+1}.$$

2. On a naturellement $p_0 = 1$ et $p_N = 0$. La relation $p_k = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})$ peut encore s'écrire $p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1} = 0$. Il s'agit d'une récurrence linéaire dont l'équation polynomiale associée est $X^2 - 2X + 1 = 0$, qui admet 1 pour racine double. Les solutions sont donc à chercher sous la forme $p_k = ak + b$. En utilisant les valeurs de p_0 et p_N, on trouve $b = 1$ puis $a = -1/N$, d'où le résultat.

3. Dans le cas asymétrique, l'équation polynomiale associée à la relation de récurrence linéaire est cette fois $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{q}{p} = 0$ qui admet deux racines distinctes 1 et q/p. Les solutions sont à chercher sous la forme $p_k = a + b(q/p)^k$. En utilisant les valeurs de p_0 et p_N, on trouve cette fois

$$b = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \quad \text{et} \quad a = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad \text{soit} \quad p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Exercice 2. *Théorème du scrutin*

1. Comme $b > 0$, les chemins qui ne passent pas par zéro vérifient nécéssairement $S_1 = 1$. On est donc ramené à des chemins de longueurs $n - 1$ issus de 1. Le nombre de chemins qui ne touchent pas l'axe est obtenu comme la différence entre le nombre de chemins total et le nombre de chemins qui touchent l'axe, c'est-à-dire $N_n(1, b) - N_n^0(1, b)$. D'après le principe de réflexion, on a $N_n^0(1, b) = N_n(-1, b)$, d'où le résultat.

2. D'après le cours, on a

$$N_n(1, b) - N_n(-1, b) = \binom{n-1}{\frac{n+b}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}} = \binom{n}{\frac{n+b}{2}} \times \frac{1}{n} \times \left[\frac{n+b}{2} - \frac{n-b}{2}\right] = \frac{b}{n}\binom{n}{\frac{n+b}{2}},$$

c'est-à-dire $N_n(1, b) - N_n(-1, b) = \frac{b}{n} N_n(0, b)$

Exercice 3. *Non retour en zéro*
On considère S une marche simple symétrique unidimensionnelle issue de zéro.

1. Pour $b > 0$, d'après le théorème du scrutin, on a
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n} \frac{N_n(0,b)}{2^n},$$
c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}(S_n = b).$$
Le cas où $b < 0$ se traite de manière analogue.

2. En faisant la somme sur b, on obtient alors
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0) = \frac{1}{n} \sum_{b \in \mathbb{Z}} |b| \times \mathbb{P}(S_n = b) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(|S_n|).$$

3. Comme lorsque k varie, les évènements $\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_n \neq 0, S_{2n} = 2k\}$ sont disjoints, la probabilité recherché sécrit comme la somme
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_{2n} \neq 0) \quad &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) \\
&= \frac{2}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \\
&= \mathbb{P}(S_{2n} = 0).
\end{aligned}$$