Une particule touchée crée m descendants avec probabilité p et meurt avec probabilité $q = 1 - p$. Dans le pire des cas, la première particule reste inactive et le processus ne démarre pas. Dans le bon cas, il y aura m particules de la première génération, m^2 pour la deuxième etc. Si p est presque 1, le nombre de particules augmente rapidement et conduit à l'explosion.

- **Survivance des noms de famille**
  Ici, seuls les descendants mâles comptent car ils transmettent le nom. Ici p_k est donc la probabilité qu'un garçon ait k garçons.
  Une première simplification vient de ce que la fertilité ne semble pas avoir de tendance, sinon p_k changerait de génération en génération ...De plus, l'hérédité commune et l'environnement des frères peut être contraire à l'hypothèse d'indépendance. Le modèle peut être raffiné pour prendre cela en compte mais cela ne modifie pas les idées [1] fondamentales.
- **Gènes et mutations**
  Chaque gène d'un organisme donné a une chance de réapparaître dans $1, 2, \dots, k$ descendants directs, et en première approximation on néglige les variations avec la population et le temps. C'est l'étude des mutations. Une mutation produit un gène d'un type nouveau qui joue le rôle de génération 0.
  Pour fixer les idées, un plan de blé est le père de 100 graines et la mère d'autant. Si la taille de la population reste constante, une moyenne de 2 parmi ces deux cent graines développera un plan. Chaque graine a une chance sur deux de recevoir un gène donné. La probabilité qu'un gène mutant apparaisse dans k nouveaux plans est égale à la probabilité de k succès parmi 200 tirages de Bernouilli de probabilité $p = \frac{1}{200}$, soit

$$p_k = \mathsf{P}(S_{200} = k) = C_{200}^k \left(\frac{1}{200}\right)^k \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200-k}$$

  qui est très proche d'une distribution de Poisson de paramètre 1, soit $e^{-1}\frac{1}{k!}$.

5.1.1 Modélisation

Introduisons une modélisation "abstraite" de ces phénomènes, afin d'étudier la loi d'évolution du nombre Z_n d'individus à la n^{e} génération. Chacun des Z_n individus de la n^{e} génération donne naissance à un nombre aléatoire ξ_i^n de descendants ($1 \leq$

[1] Notons que cet exemple, connu sous le nom de processus de Galton-Watson, a motivé la première étude sur les processus de branchement.

$i \leq Z_n$) de sorte que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n \quad (n \geq 0),$$

où la somme vaut 0 si $Z_n = 0$.
Toutes les v.a. ξ_i^n sont supposées indépendantes entre elles et de même loi de probabilité dont la fonction génératrice est la fonction définie pour $0 \leq z \leq 1$ par

$$G(z) = G_\xi(z) = \mathsf{E}(z^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \leq 1.$$

Dans toute la suite, nous exclurons le cas inintéressant où ξ serait égale à 1 presque certainement, c'est-à-dire le cas où $G(z) \equiv z$. Rappelons que l'espérance de la v.a. ξ peut être calculée à partir de la fonction génératrice, $\mathsf{E}(\xi) = G'(1)$.
Notons $G_n = G_{Z_n}$ la fonction génératrice de Z_n. L'indépendance des descendants et leur identité de distribution montre alors que G_n vérifie la relation de récurrence

$$G_{n+1}(z) = \mathsf{E}(z^{Z_{n+1}}) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(z^{Z_{n+1}}|Z_n)) = \mathsf{E}(G(z)^{Z_n}) = G_n[G(z)]$$

et si nous supposons que $Z_0 = 1$ de sorte que $G_0(z) \equiv z$, nous trouvons que pour tout $n \geq 1$,

$$G_n = G \circ G \circ G \circ \cdots \circ G \ \ n \text{ fois}.$$

Si le nombre de descendants est intégrable, le nombre moyen de descendants à la n^{e} génération est donné par $\mathsf{E}(Z_n) = \mathsf{E}(\xi)^n$. Cette propriété se montre par récurrence à partir de la formule $\mathsf{E}(Z_n) = G_n'(1)$, $G(1) = 1$.

Remarque 5.1.1 La suite (Z_n) est une chaîne de Markov issue de 1, dont l'espace d'états est dénombrable. L'état 0 est absorbant. Nous n'aurons pas de mal à montrer que la chaîne est transiente. La question est alors de savoir si elle “sort” de $\mathbb{N}$ par 0 ou par l'infini.

Exemple 5.1.2 Exemple de la loi géométrique[2]
La loi géométrique est la loi du premier succès dans une suite de tirages indépendants,

[2] Nous suivons la présentation de D.Williams dans son remarquable livre, Probability with martingales [32].

où le succès a une probabilité p. On donne l'indice 0 au résultat du premier tirage. On a donc une loi définie sur $\mathbb{N}$ par

$$p_k = pq^k, \quad q = 1-p, \quad 0 < p, q < 1.$$

La fonction génératrice est égale à

$$G(z) = p\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k = \frac{p}{1-qz}$$

et

$$\mathsf{E}(\xi) = \frac{q}{p} = \mu.$$

Le calcul de la fonction génératrice associée à la n^{e} génération se fait par récurrence. Pour mener simplement le calcul, rappelons la relation qui existe entre composition des fonctions homographiques et produit de matrices.

En effet, si $A(z) = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$ lorsque A est une matrice 2×2 de terme général (a_{ij}), alors

$$A(B(z)) = (AB)(z).$$

En particulier si $p \neq q$, en utilisant la diagonalisation de la matrice A, dont les valeurs propres sont p et q, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 1 \end{pmatrix}^n = (q-p)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$G_n(z) = \frac{pq^n(1-z) + p^n qz - p^{n+1}}{q^{n+1}(1-z) + qp^n z - p^{n+1}} = \frac{\mu^n(1-z) + \mu z - 1}{\mu^{n+1}(1-z) + \mu z - 1}. \tag{5.1}$$

Si $p = q = 1/2$, $G_n(z) = \dfrac{n(1-z)+z}{(n+1)(1-z)+z}$ est la limite de l'expression précédente (5.1) quand μ tend vers 1. Cette formule se calcule aussi aisément par récurrence.

La probabilité d'extinction de la n^{e} génération est exactement

$$G_n(0) = \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - 1} \quad \text{si } p \neq q$$
$$G_n(0) = \frac{n}{n+1} \quad \text{si } p = q.$$

En résumé,

(i) Si $q < p$, $(p > 1/2)$, $G_n(0) = \mathsf{P}(Z_n = 0) \to 1$. Il y a extinction.

(ii) Si $p < q$,$(p < 1/2)$ $G_n(0) = \mathsf{P}(Z_n = 0) \to \frac{p}{q}$. L'extinction n'est pas certaine.

(iii) Si $p = 1/2$, $G_n(0) = \frac{n}{n+1} \to 1$. Il y a extinction.

Par suite, il n'y a que deux situations : ou la population s'éteint à coup sûr si $p \geq 1/2$, ou elle s'éteint avec une probabilité de $\frac{p}{q}$.

Dans le cas général, nous pouvons aussi étudier la probabilité d'extinction de la population. L'outil essentiel est la suite de fonctions génératrices (G_n) puisque la probabilité d'extinction de la génération n est $\pi_n = \mathsf{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$.
Comme les événements $\{Z_n = 0\}$ forment une suite croissante, l'événement «extinction de la population» est donc naturellement défini par

$$\text{Ext} := \lim_n \uparrow \{Z_n = 0\}.$$

D'où

$$\mathsf{P}(\text{Ext}) = \pi = \lim_n \uparrow \pi_n. \tag{5.2}$$

Puisque la fonction G est continue, et que les fonction G_n sont des itérées de la fonction G, la suite π_n vérifie $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$. La probabilité d'extinction est donc une solution π de l'équation

$$\pi = G(\pi)$$

Remarquons que 1 est toujours solution de cette équation. Nous recherchons s'il existe d'autres solutions. La forme du graphe de la fonction G, qui est une fonction analytique, convexe et croissante, avec $G(0) = \mathsf{P}(X = 0) > 0$ et $G(1) = 1$, permet d'avoir une réponse simple suivant la valeur de μ. Deux cas seulement se présentent.

Théorème 5.1.3 *Dans les cas* **sous-critique** $(\mathsf{E}(\xi) < 1)$ *et* **critique** $(\mathsf{E}(\xi) = 1)$, *la population s'éteint presque certainement :* $\mathsf{P}(\text{Ext}) = 1$. *Dans le cas* **sur-critique** $(\mathsf{E}(\xi) > 1)$, *la probabilité d'extinction* $\mathsf{P}(\text{Ext})$ *est égal au nombre positif* π *strictement inférieur à 1, solution unique de* $G(\pi) = \pi$ *dans* $[0, 1[$.

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme analytique suivant.

Lemme 5.1.4 **(i)** *Si* $\mathsf{E}(\xi) = G'(1) \leq 1$, $G_n(z)$ *croît vers* 1 *lorsque* $n \nearrow \infty$ *pour tout* $z \in [0, 1]$.

(ii) *Si* $\mathsf{E}(\xi) > 1$, *l'équation* $G(\pi) = \pi$ *possède une solution unique dans* $[0, 1[$ *et* $G_n(z)$ *croît vers* π *lorsque* $n \nearrow \infty$, *pour tout* $z \in [0, \pi]$ *et décroît vers* π *pour tout* $z \in [\pi, 1[$.

DÉMONSTRATION :

(i) L'application $z \to G(z)$ de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même est croissante et convexe car les dérivées

$$G'(z) = \mathsf{E}(\xi z^{\xi-1}) \quad \text{et} \quad G''(z) = \mathsf{E}[\xi(\xi-1)z^{\xi-2}]$$

sont positives en tant qu'espérances de v.a. réelles discrètes positives. De plus $G(1) = 1$. Comme nous avons exclu le cas $G(z) \equiv z$, la courbe G ne coupe pas la diagonale du carré $[0, 1]^2$ en un point distinct de $(1, 1)$ si $G'(1) \leq 1$, et au contraire la coupe si $G'(1) > 1$; ceci se voit bien sur la figure ci-dessous. Ainsi, selon le cas, l'équation de point fixe $G(\sigma) = \sigma$ n'a pas de solution ou au contraire possède une unique solution dans $[0, 1[$.

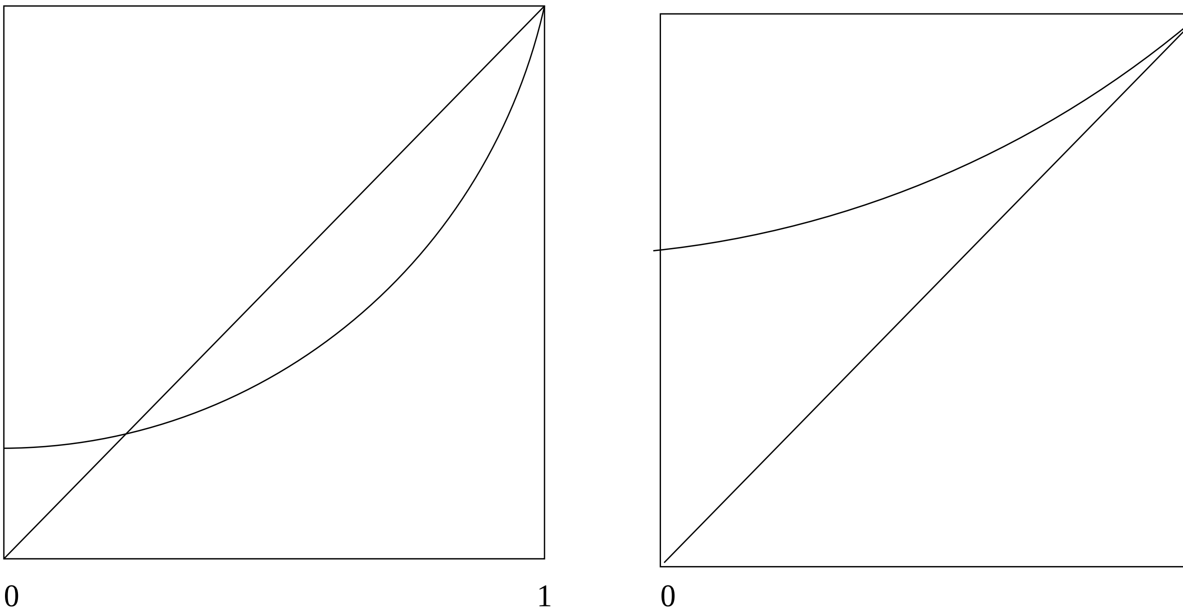

Figure 5.1 *La fonction* G *dans les deux cas* $E(\xi) > 1$ *et* $E(\xi) \leq 1$.

(ii) Lorsque $G'(1) \leq 1$, nous avons $z \leq G(z)$ et donc $G_n(z) \leq G_{n+1}(z)$ (puisque $G_{n+1} = G \circ G_n$) pour tout z ; la limite $\lim_n \nearrow G_n(z)$ qui est ≤ 1 et solution de $G(u) = u$, ne peut alors valoir que 1. En particulier, grâce à (5.2)

$$\mathsf{P}(\text{Ext}) = \lim_n G_n(0) = 1.$$

(iii) Semblablement si $G'(1) > 1$, nous avons $z \leq G(z) \leq \pi$ ou $z \geq G(z) \geq \pi$ selon que $z \leq \pi$ ou que $z \geq \pi$; il s'en suit que $G_n(z)$ croît resp. décroît avec n selon le cas. La limite $\lim_n G_n(z)$ qui est solution de $G(u) = u$ et strictement inférieure à 1, du moins si $z \neq 1$, est alors égale nécessairement à π. Ainsi

$$\mathsf{P}(\mathrm{Ext}) = \lim_n G_n(0) = \pi \quad .$$

5.1.2 Vitesse de convergence

Il est important d'avoir des idées des vitesses de convergence vers l'extinction. La pluspart des résultats sont obtenus à partir d'une étude plus fine des fonctions génératrices.

Lemme 5.1.5 **(i)**

$$\begin{aligned} 1 - G_n(z) &\leq [\mathsf{E}(\xi)]^n (1-z) \quad \forall z & (5.3)\\ 0 \leq \pi - G_n(z) &\leq c^n(\pi - z), \quad \forall z \leq \pi, \ \textit{où } c = G'(\pi). & (5.4) \end{aligned}$$

(ii) *Si* $\mathsf{E}(\xi) = 1$, *et* ξ *est de variance* σ^2, *alors*

$$\lim_n \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1 - G_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right] = \sigma^2/2$$

uniformément pour tout $0 \leq s < 1$.

Remarque 5.1.6 Dans le cas de la loi géométrique, $\mathsf{E}(\xi) = q/p$ et si $p < q$ $\pi = p/q, \quad c = G'(\pi) = \pi$.

DÉMONSTRATION :

Les deux premières inégalités sont des inégalités de convexité pour la fonction G_n, du type

$$G_n(x) - G_n(y) \leq G'_n(x)(x - y).$$

- La première applique l'inégalité entre les points 1 et z. Elle utilise donc la dérivée de G_n au point 1 dont nous avons montré que $G'_n(1) = \mathsf{E}(Z_n) = \mathsf{E}(\xi)^n$
- La deuxième l'applique aux points π et z. Comme π est un point fixe de G, par récurrence $G'_n(\pi) = G'_{n-1}(G(\pi))c = G'_{n-1}(\pi)c = c^n$.

Pour la dernière estimation, nous utilisons le développement limité de la fonction génératrice au voisinage de $s = 1$, dont les premiers coefficients sont $\mathsf{E}(\xi) = 1$ et $\frac{1}{2}\mathsf{E}(\xi(\xi - 1) = \frac{1}{2}\sigma^2$, soit

$$G(s) = s + \sigma^2/2(1-s)^2 + \varepsilon(s)(1-s)^2$$

où la fonction $\varepsilon(s)$ tend vers 0 si $s{\rightarrow}1$.Cela conduit à une estimation uniforme

$$\frac{1}{1-G(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{G(s)-s}{(1-G(s))(1-s)}$$
$$\frac{1-s}{1-G(s)}[\sigma^2/2 + \varepsilon(s)] = \sigma^2/2 + r(s)$$

où $r(s){\rightarrow}0$ si $s{\rightarrow}1$.
Reitérons cette estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-G_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1-G(G_j(s))} - \frac{1}{1-G_j(s)}\right] \\ &= \sigma^2/2 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r(G_j(s)) \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0, d'après le lemme d'Abel puisque $G_n(s){\rightarrow}1$.
Puisque $G_n(s)$ est croissante et converge vers 1 uniformément, et la fonction r bornée, la convergence est uniforme.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.1.7 **(i)** *Dans le cas sous-critique* $(\mathsf{E}(\xi) < 1)$ *la probabilité de «non extinction à l'instant n» tend vers 0 à une vitesse géométrique d'après (5.3), soit*

$$\mathsf{P}(Z_n \neq 0) = 1 - G_n(0) \leq [\mathsf{E}(\xi)]^n.$$

De plus $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang.

(ii) *Dans le cas sur-critique* $(\mathsf{E}(\xi) > 1)$ *sachant qu'il n'y a pas extinction la taille de la population Z_n explose. Plus précisément pour tout entier a il existe une constante k_a telle que*

$$1 - \mathsf{P}(Z_n > a|\text{nonExt}) \leq k_a G'(\pi)^n.$$

(iii) *Dans le cas critique* $(\mathsf{E}(\xi) = 1)$ *si* $\mathsf{E}(\xi^2) < \infty$

$$\mathsf{P}(Z_n \neq 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \qquad \text{lorsque}\, n \to \infty.$$

DÉMONSTRATION :

$\Rightarrow$ Pour tout entier $a > 0$ et quel que soit z que l'on se sera fixé dans $]0, \pi[$, d'après (5.4)

$$\mathsf{P}(0 < Z_n \leq a) \leq z^{-a} \sum_{k \geq 1} \mathsf{P}(Z_n = k) = z^{-a}[G_n(z) - G_n(0)] \leq 2\pi c^n z^{-a}.$$

Quand $c = G'(\pi) < 1$ (cas sous-critique et sur-critique), puisque la série géométrique est convergente,

$$\mathsf{E}\Big(\sum_n \mathbf{1}_{(0<Z_n\leq a)}\Big) < \infty.$$

La somme sous le signe espérance est donc nécessairement presque sûrement finie.

$\Rightarrow$ Pour presque toutes les évolutions, seuls un nombre fini de Z_n restent dans l'intervalle $]0, a[$ (lemme de Borel Cantelli). Comme les événements sont croissants, $Z_n = 0$ implique que $Z_{n'} = 0$ pour tout $n' > n$ p.s. Deux cas seulement sont possibles :

- ou bien $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang (c'est l'extinction),
- ou bien $Z_n > a$ à partir d'un certain rang et comme a est arbitraire : $Z_n \to \infty$ (c'est l'explosion).

Ces deux événements complémentaires ont resp. pour probabilités π et $1 - \pi$. De plus

$$1 - \mathsf{P}(Z_n \geq a | Z_m \to \infty) \leq \frac{\mathsf{P}(0 < Z_n \leq a)}{\mathsf{P}(Z_m \to \infty)} \leq \frac{2\pi c^n z^{-a}}{1 - \pi}.$$

$\Rightarrow$ Dans le cas critique, la probabilité d'extinction tend beaucoup plus lentement vers zéro et plus précisément, si $\mathsf{E}(\xi^2) < \infty$,

$$\mathsf{P}(Z_n \neq 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \qquad \text{lorsque } n \to \infty$$

puisque

$$\begin{aligned} n\mathsf{P}(Z_n \neq 0) &= n(1 - G_n(0)) \\ &= [\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 - G_n(0)} - 1\right) + \frac{1}{n}]^{-1} \to \frac{2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que la **théorie des martingales** permet de donner une autre approche de ces problèmes et d'avoir des résultats précis même dans le cas critique.

5.1.3 Une martingale remarquable pour le branchement

Notons $\mu = \mathsf{E}(\xi)$ le nombre moyen d'enfants de chaque individu. Remarquons que

$$\mathsf{E}(Z_{n+1} | Z_n) = \mu Z_n.$$

En particulier

$$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$$

est une martingale positive, d'espérance 1 (car $Z_0 = 1$) dont nous allons étudier la convergence.

Convergence p.s.

D'après le théorème 4.4.1 de convergence des martingales positives

$$M_n \to M_\infty.$$

Ainsi, sur $\{M_\infty > 0\}$, la suite Z_n a une croissance exponentielle. Dans le cas sous-critique où $\mu < 1$, $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang. La v.a. M_∞ est donc nulle p.s. Remarquons l'apparente contradiction avec le fait que la martingale est d'espérance 1. On a donc là une situation typique où la convergence p.s. et la convergence dans $\mathbb{L}^1$ ne coincident pas. Intuitivement, cela veut dire que si M_n n'est pas nulle, alors elle prend de très grandes valeurs avec une petite probabilité. C'est ce qu'on appelle un phénomène de *grande déviation*.

Convergence dans $\mathbb{L}^2$

Supposons que le nombre typique d'enfants est une v.a. de moyenne $\mathsf{E}(\xi) = \mu$ et de variance $\mathsf{Var}(\xi) = \sigma^2$.

Par la définition même du processus de branchement

$$\mathsf{E}\big(Z_{n+1}^2 | Z_n\big) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n,$$

d'où

$$\mathsf{E}\big(M_{n+1}^2\big) = \mathsf{E}(M_n^2) + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}},$$

de telle sorte que la martingale (M_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2$ si et seulement si $\mu > 1$. Le théorème de convergence des martingales nous assure que la v.a. limite p.s. est aussi limite dans $\mathbb{L}^2$ et donc

$$\mathsf{E}(M_\infty) = 1, \quad \mathsf{Var}(M_\infty) = \sigma^2(\mu(\mu - 1))^{-1}.$$

Convergence dans $\mathbb{L}^1$ et loi de M_∞

Nous avons vu que la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de la martingale (M_n) ne peut être automatique. Le meilleur résultat qui a été établi est le suivant

$$\mathsf{E}(M_\infty) = 1, \quad \text{si et seulement si} \quad \mu > 1, \text{ et } \quad \mathsf{E}(\xi \ln \xi) < +\infty.$$

Il existe donc des situations où il n'y a pas extinction, mais où la martingale limite est nulle p.s. Dans tous les cas, comme la v.a. limite est positive, on peut s'intéresser à sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) := \mathsf{E}(\exp(-\lambda M_\infty)) = \mathrm{lim_n}\mathsf{E}(\exp(-\lambda \mathrm{M_n}))$$

puisque dans ces conditions le théorème de convergence dominée s'applique. Or $\mathsf{E}(\exp(-\lambda M_n)) = \mathsf{E}(\exp(-\frac{\lambda}{\mu^n} Z_n)) = G_n\left(\exp\left(\frac{-\lambda}{\mu^n}\right)\right)$. La transformée de Laplace vérifie donc une équation fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda\mu) = G(\mathcal{L}_\infty(\lambda)).$$

Dans le cas où l'on connait explicitement la fonction G_n, on peut décrire complètement la distribution de M_∞.

Exemple 5.1.8 (La loi géométrique (ii)). Dans ce cas, la transformée de la Laplace de M_n qui vaut

$$G_n(z_n) = p\frac{q^n(1-z_n) + p^{n-1}qz_n - p^n}{q^{n+1}(1-z_n) + qp^n z_n - p^{n+1}}, \quad z_n = \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu^n}\right),$$

converge vers

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) = \frac{p\lambda + q - p}{q\lambda + q - p}.$$

Comme dans ce contexte, $\pi = \inf(\frac{p}{q}, 1)$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) = \pi + \int (1-\pi)^2 e^{-\lambda x} e^{-(1-\pi)x} dx$$

C'est la transformée de Laplace d'une distribution qui a une masse de Dirac en 0 de probabilité π, et qui, sachant qu'on n'est pas en zéro, suit une loi exponentielle de paramètre $(1-\pi) = p(\mu - 1)^+$.