

Promenade aléatoire

Chaînes de Markov et simulations ;
martingales et stratégies

Michel Benaïm et Nicole El Karoui





Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».

Cette pratique qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que la production et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites.

Les demandes d'autorisation de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie :

20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Table des matières

I	Modélisation markovienne	13
1	Suites récurrentes aléatoires	17
1.1	Suites récurrentes aléatoires	17
1.2	Battre les cartes	18
1.2.1	Oui, mais combien de fois ?	20
1.3	Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d	21
1.3.1	La constante de Polya	24
1.4	Convolutions de Bernoulli	25
1.4.1	Autosimilarité	29
1.4.2	Propriétés fines	32
1.4.3	Le problème d'Erdős	37
1.5	Simulation de fractales	37
2	Chaînes de Markov	41
2.1	Matrices de transition et chaînes de Markov	41

2.1.1	Équation de Chapman-Kolmogorov	46
2.1.2	Probabilités invariantes	48
2.1.3	Propriété de Markov	51
2.2	Chaînes de Markov finies	54
2.2.1	Existence des probabilités invariantes	54
2.2.2	Irréductibilité et théorème ergodique presque sûr	55
2.2.3	Apériodicité et convergence en loi	62
2.2.4	Croissance de l'entropie	70
2.3	Chaînes de Markov dénombrables	72
2.3.1	Récurrence et transience	75
2.3.2	Marches aléatoires	80
2.3.3	Théorèmes ergodiques	85
2.4	Noyaux et chaînes sur un espace quelconque	90
2.4.1	Noyaux de transition	90
2.4.2	Chaînes de Markov sur un espace quelconque	93
3	Simulation par chaînes de Markov	95
3.1	Méthode de Monte-Carlo	95
3.1.1	Algorithme de Metropolis	96
3.1.2	Simulation des lois de Gibbs	99
3.1.3	Optimisation globale et recuit simulé	101
3.1.4	Remarques sur les méthodes de Monte-Carlo	106

3.2	Simulation exacte : l'algorithme de Propp-Wilson	106
3.2.1	Remarques sur l'algorithme de Propp et Wilson	108
3.3	Vitesse	110
3.3.1	Spectre des transitions réversibles	110
3.3.2	Vitesse de convergence des noyaux réversibles	111
3.3.3	Formes de Dirichlet, trou spectral et inégalités de Poincaré	113
3.3.4	Application à la simulation des lois de Gibbs	117
II	Martingales et temps d'arrêt	121
4	Martingales à temps discret	125
4.1	Espérance conditionnelle	125
4.1.1	Propriétés	128
4.1.2	Exemples de calcul d'espérances conditionnelles	129
4.2	Filtrations, processus et martingales	130
4.2.1	Processus aléatoires	130
4.2.2	Martingales à temps discret	132
4.2.3	Propriétés des martingales	133
4.3	Convergence des martingales de carré intégrable	136
4.3.1	Inégalité de Doob	136
4.3.2	Convergence des martingales dans \mathbb{L}^2	138
4.3.3	Loi des grands nombres	139

4.4	Convergence : le cas général	141
4.4.1	Loi du zéro-un	146
4.4.2	Théorème ergodique pour les chaînes de Markov	146
4.5	Inégalités et convergences : les preuves classiques	148
4.5.1	Inégalités maximales	149
4.5.2	Théorèmes de Convergence	151
5	Quelques applications des martingales	153
5.1	Processus de branchement	153
5.1.1	Modélisation	154
5.1.2	Vitesse de convergence	159
5.1.3	Une martingale remarquable pour le branchement	161
5.2	Urnes de Polya et économie	164
5.3	Algorithmes d'approximation stochastique	169
6	Stratégies, temps d'arrêt et optimisation	185
6.1	Stratégies et temps d'arrêt	185
6.1.1	La roulette	185
6.1.2	Stratégies et martingales	188
6.1.3	Temps d'arrêt	189
6.2	Théorème d'arrêt et applications	191
6.2.1	Théorème d'arrêt	191
6.2.2	Applications du théorème d'arrêt	192

6.2.3	N'espérez pas gagner au casino!	196
6.3	Martingales, temps d'arrêt et chaînes de Markov	197
6.3.1	Martingales et chaînes de Markov	198
6.3.2	Problèmes de Cauchy et de Dirichlet pour les chaînes de Markov dénombrables	205
6.4	Arrêt optimal	210
6.4.1	Mathématiques, mariage ou comment choisir?	210
6.4.2	Arrêt optimal en horizon fini	212
6.4.3	Arrêt optimal en horizon infini	216
7	Introduction à la finance des produits dérivés	219
7.1	Évaluation et couverture dans un modèle à une période	220
7.1.1	Un modèle simplifié à une période	221
7.1.2	Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)	223
7.2	Un modèle d'arbre binomial à N périodes	232
7.2.1	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein	233
7.2.2	Portefeuille autofinçant	234
7.2.3	Évaluation et couverture	238
7.3	Options américaines et arrêt optimal	245
7.3.1	Étude du problème d'arrêt optimal	246
7.3.2	Étude de la couverture	247
7.4	Les modèles "asymptotiques"	248
7.4.1	La formule de Black et Scholes	249

7.4.2	Le mouvement brownien	252
7.5	Quelques problèmes numériques	255
7.5.1	Un phénomène d'oscillation étrange	255
III	Appendice	259
8	Probabilités et théorie de l'intégration	261
8.1	Tribus, variables aléatoires et lois de probabilité.	261
8.1.1	Tribus	261
8.1.2	Tribu engendrée	262
8.1.3	Variables aléatoires et applications mesurables	263
8.1.4	Mesures, probabilités et lois	269
8.2	Intégrales et espérances	274
8.2.1	Intégrale des fonctions positives	274
8.2.2	Intégrale des fonctions de signe quelconque	276
8.2.3	Continuité et dérivabilité sous le signe \int	279
8.2.4	Le théorème du transport	280
8.2.5	La formule de changement de variable	281
8.2.6	Le théorème de Fubini	282
8.3	Inégalités et espaces \mathbb{L}^p	284
8.3.1	Inégalités de Jensen, Markov et Chebyshev	284
8.3.2	Espaces \mathbb{L}^p	285

8.4	Indépendance	286
8.4.1	Événements indépendants	287
8.4.2	Tribus indépendantes	287
8.4.3	Variabes aléatoires indépendantes	288
8.5	Convergences des variables aléatoires	288
8.5.1	Convergence presque sûre, en probabilité, et dans \mathbb{L}^p	289
8.6	Convergence en loi.	295
8.6.1	Exemples et définition	295
8.6.2	Le théorème de Prohorov	300
8.6.3	Convergence étroite et fonctions caractéristiques	302

Avant-propos

Ce cours est une introduction aux chaînes de Markov, aux algorithmes markoviens et aux martingales.

L'ensemble des prérequis nécessaires à sa lecture a été réduit au minimum. De la "théorie de l'intégration" seuls les principaux résultats (théorèmes de Lebesgue, de Fubini, . . .) sont vraiment nécessaires¹. Bien qu'une certaine familiarité avec le vocabulaire probabiliste (espérance, loi, variables aléatoires, . . .) soit supposée, le seul concept probabiliste dont nous ferons vraiment usage est celui *d'indépendance*.

Une part très importante de ce cours est donnée aux exemples et aux exercices. Seules la lecture attentive des premiers et le travail des seconds aideront le lecteur à se forger une intuition et à comprendre les concepts introduits.

Les sections Pour en savoir plus imprimées en petits caractères contiennent des compléments et des développements qui peuvent être réservés à une seconde lecture.

Nous remercions tout particulièrement Michel Delasnerie pour son aide précieuse avec les simulations ; Benjamin Bergé, Aline Kurtzmann et Pierre Mathieu pour leur relecture attentive ; les enseignants des petites classes, Patrick Cattiaux, Bernard Lapeyre et Stefano Olla ; ainsi que les étudiants des promotions 2000 et 2001, en particulier Pierre Galloux et Johannès Rasselet, pour leurs nombreux conseils.

¹Ces résultats sont d'ailleurs rappelés en appendice.

Première partie

Modélisation markovienne

Soit M un ensemble appelé *espace d'états* et $X_n \in M$ une variable désignant l'état à l'instant $n \in \mathbb{N}$ d'un système soumis à une loi d'évolution aléatoire. Dans de nombreuses situations l'évolution temporelle de (X_n) vérifie la propriété suivante :

“ la loi de X_{n+1} ne dépend de l'histoire (X_0, X_1, \dots, X_n) du système que par l'état présent X_n .”

Cette propriété s'appelle la *propriété de Markov* et la suite (X_n) une *chaîne de Markov*, du nom du mathématicien Andrei A. Markov.²

Les chaînes de Markov sont un objet essentiel des probabilités modernes. Elles apparaissent et sont utilisées avec succès dans des domaines aussi divers que la physique, la biologie, les sciences sociales ou l'informatique. Nous rencontrerons dans la suite de ce cours quelques exemples inspirés par ces disciplines.

En général, l'espace d'états M est un sous-espace de \mathbb{R}^m . Si c'est un ensemble fini ou dénombrable, il est muni de la tribu de l'ensemble des parties. Si c'est un sous-ensemble plus riche, il est muni de la tribu borélienne induite, c'est-à-dire de la tribu engendrée par les ouverts de M (voir la section 8.1.1 de l'appendice de ce cours).

Le chapitre 1 est essentiellement un chapitre de motivations dans lequel nous allons nous attacher à décrire (et étudier) quelques exemples avant de définir formellement (dans le chapitre 2) les concepts de base qui serviront dans la suite. Les sections 2.2 et 2.3 du chapitre 2 sont respectivement consacrées aux chaînes finies (M est un ensemble fini) et dénombrables (M est dénombrable infini). Le chapitre 3 présente les algorithmes classiques de simulations pour (et par) les chaînes finies.

²Mathématicien russe né en 1856 et mort en 1922. Markov a travaillé en théorie des nombres et en analyse, puis à partir de 1900, en probabilités. Élève de Chebyshev, il généralisa la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale à une classe de variables aléatoires dépendantes connues aujourd'hui sous le nom de *chaînes de Markov*.

Chapitre 1

Suites récurrentes aléatoires

À l'exception de la première section, ce chapitre n'est pas essentiel à la suite du cours. Le but ici est surtout d'éveiller la curiosité du lecteur en lui présentant quelques exemples très simples à décrire mais dont la richesse des comportements est remarquable. Nous nous sommes inspirés à plusieurs reprises d'un bel article de Diaconis et Freedman [41] sur les "itérations aléatoires de fonctions" dont la lecture est très abordable.

1.1 Suites récurrentes aléatoires

Une *suite récurrente aléatoire* sur M est une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans M définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})^1$ solution d'une équation récurrente de la forme

$$X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n) \tag{1.1}$$

où :

- (a) $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans un espace mesurable (Θ, \mathcal{A}) ;

¹Rappelons que Ω est un ensemble, \mathcal{F} une tribu sur Ω et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité (voir l'appendice).

(b)

$$\begin{aligned} f : \Theta \times M &\rightarrow M, \\ (\theta, x) &\mapsto f(\theta, x) = f_\theta(x) \end{aligned}$$

est une application mesurable ;

(c) X_0 (la condition initiale) est une variable aléatoire (éventuellement déterministe) indépendante de la suite (θ_n) .

Définition 1.1.1 Si m désigne la loi des variables (θ_n) , le couple (f, m) s'appelle un **système dynamique aléatoire** et la suite (X_n) solution de (1.1) une *trajectoire* du système (f, m) de condition initiale X_0 . La loi de X_0 est appelée la *loi initiale* de (f, m) .

Remarque 1.1.2 Dans le cas particulier où f ne dépend pas de θ , la récurrence (1.1) est déterministe. Son étude fait l'objet de la *théorie des systèmes dynamiques* (à temps discret) lorsque X_0 est déterministe, et de la *théorie ergodique* lorsque X_0 est aléatoire.

Commençons par quelques exemples.

1.2 Battre les cartes

Un joueur de poker qui bat un jeu standard de 52 cartes nous fournit un bel exemple de suite récurrente aléatoire sur le groupe symétrique $M = S_{52}$ des 52! permutations (les bijections de $\{1, \dots, 52\}$ dans lui-même). À l'instant initial, les cartes sont ordonnées et l'état initial du système est la permutation identité : $X_0 = e$. À l'étape $n + 1$, le joueur choisit une permutation θ_{n+1} au hasard dans un sous-ensemble $S \subset M$ et l'applique à X_n . La suite (X_n) est donc une suite récurrente aléatoire

$$X_{n+1} = \theta_{n+1} \circ X_n$$

où les variables θ_i sont i.i.d. à valeurs dans S .

L'ensemble S caractérise le type de "battage" et dépend de la dextérité du joueur. Typiquement une permutation de S est obtenue de la façon suivante : on choisit un

entier entre 1 et 52 (on coupe) puis on intercale les cartes $1, 2, \dots, k$ au milieu des cartes $k + 1, \dots, 52$.

Nous ne chercherons pas ici à décrire l'ensemble S avec précision mais nous supposerons que le battage est "mélangeant", c'est-à-dire

- (a) S engendre M : toute permutation $x \in M$ peut s'écrire comme un produit fini $x = s_1 \circ \dots \circ s_l$ d'éléments de S ;
- (b) la loi m des variables θ_n charge tous les éléments de S : $m(s) > 0$ pour tout $s \in S$.

Sous ces hypothèses, la suite (X_n) vérifie les propriétés (très intuitives) suivantes :

- (i) elle est *récurrente* : elle visite infiniment souvent tous les points de l'espace d'états ;
- (ii) elle satisfait une *loi des grands nombres* : la fréquence d'occupation d'un sous-ensemble $A \subset M$ est asymptotiquement égale au "volume" de $A = \text{card}(A)/52!$.

Plus précisément,

Proposition 1.2.1 *Pour tout $x \in M$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} = \frac{1}{52!} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_e)}$$

où

$$T_e = \inf\{n > 0 : X_n = e\}$$

désigne le premier instant de retour à e .

Cet énoncé est un cas particulier du *théorème ergodique presque sûr* pour les chaînes de Markov finies (*i.e.* sur un espace d'états fini) que nous démontrerons dans la section 2.2 du chapitre 2. Nous conseillons l'exercice suivant au lecteur trop impatient pour attendre le chapitre 2.

Exercice 1.2.2 Pour tout $i \geq 1$, notons Δ^i l'intervalle de temps écoulé entre la i^e et la $(i-1)^e$ visite à e , c'est-à-dire

$$\Delta^i = \inf\{k > 0 : \theta_{T^{i-1}+k} \circ \dots \circ \theta_{T^{i-1}+1} = e\},$$

où $T^0 = 0$ et $T^i = \Delta^i + \dots + \Delta^1$.

1) Montrer que les variables Δ^i sont indépendantes et de même loi. En déduire que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{T^i} = \frac{1}{E(T_e)}.$$

2) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=e\}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{T^i}.$$

3) Prouvez la proposition 1.2.1.

1.2.1 Oui, mais combien de fois ?

La proposition 1.2.1 est un résultat asymptotique, et de ce fait n'est pas entièrement satisfaisante pour le joueur de poker, qui préférerait savoir si le paquet est bien mélangé lorsqu'il cesse de battre les cartes. En d'autres termes (plus mathématiques), le joueur aimerait pouvoir comparer loi de X_n avec la loi uniforme sur M .

Introduisons la distance

$$d_n = \frac{1}{2} \sum_{x \in M} \left| P(X_n = x) - \frac{1}{52!} \right| \leq 1.$$

La proposition suivante donne un premier élément de réponse à la question du joueur.

Proposition 1.2.3 *Supposons que S soit tel que l'entier l de l'hypothèse (a) puisse être choisi indépendamment de x (il suffit par exemple de supposer que $e \in S$). Alors il existe des constantes $C > 0$ et $0 \leq \rho < 1$ (dépendantes de S) telles que*

$$d_n \leq C\rho^n.$$

Il s'agit là encore d'un résultat tout à fait typique des chaînes de Markov finies. Nous le démontrerons dans les chapitres 2 (théorème 2.2.14) et 3 (théorème 3.3.3) dans un cadre plus général. Malheureusement, les meilleures constantes C et ρ sont difficiles à calculer et les estimés faciles sont trop grossiers.

En 1986, Persis Diaconis² se rend célèbre en démontrant le résultat suivant :

²Persis Diaconis est professeur de mathématiques à Standford. Il a commencé sa carrière comme magicien professionnel avant de devenir mathématicien. Non seulement Diaconis démontre de jolis théorèmes sur le mélange des cartes mais il sait aussi les battre !

il suffit de battre 7 fois un jeu de 52 cartes.

Plus précisément, Diaconis démontre que le graphe de la fonction $n \rightarrow d_n$ est une “sigmoïde”. Pour $n < 7$, d_n est proche de 1 et pour $n \geq 8$, d_n est proche de 0. L’explication de ce phénomène (dit de “cut-off”) n’entre pas dans le cadre de ce cours mais le lecteur intéressé pourra consulter Diaconis [16], ou encore l’excellent cours de Saloff-Coste [28].

1.3 Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d

Soient e_1, \dots, e_d les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d . Un marcheur (sans doute ivre!) se déplace dans \mathbb{Z}^d . Sa position à l’instant n est la variable aléatoire $X_n \in \mathbb{Z}^d$ définie par la récurrence aléatoire : $X_0 = 0$, et

$$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des v.a. i.i.d uniformément distribuées dans $\{e_1, \dots, e_d, -e_1, \dots, -e_d\}$.

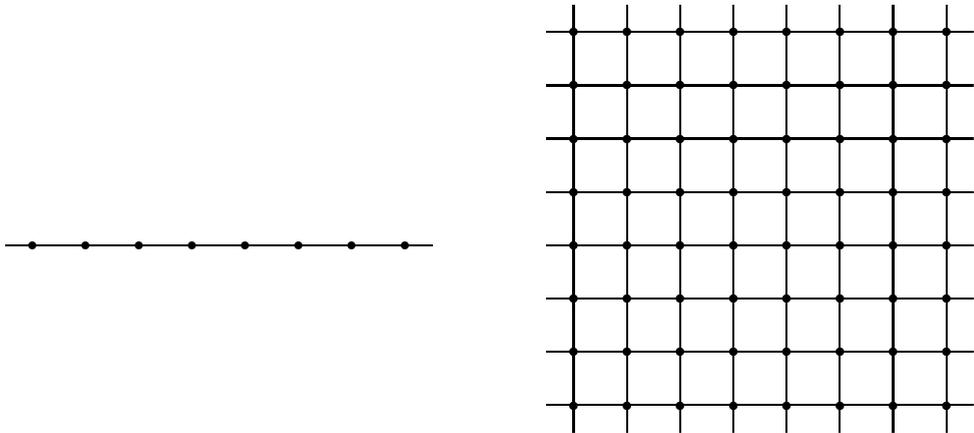


Figure 1.1 Les réseaux \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2 .

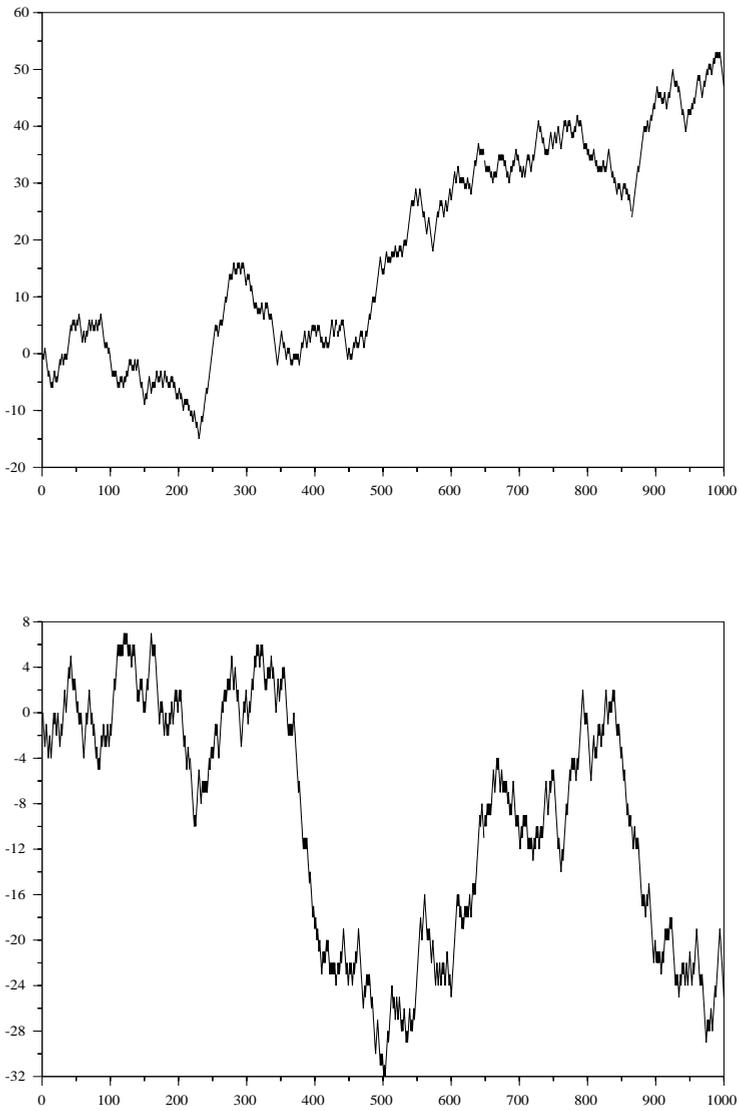


Figure 1.2 *Marches aléatoires sur \mathbb{Z} .*
Le temps \mathbb{N} est en abscisse et l'espace \mathbb{Z} en ordonnée.

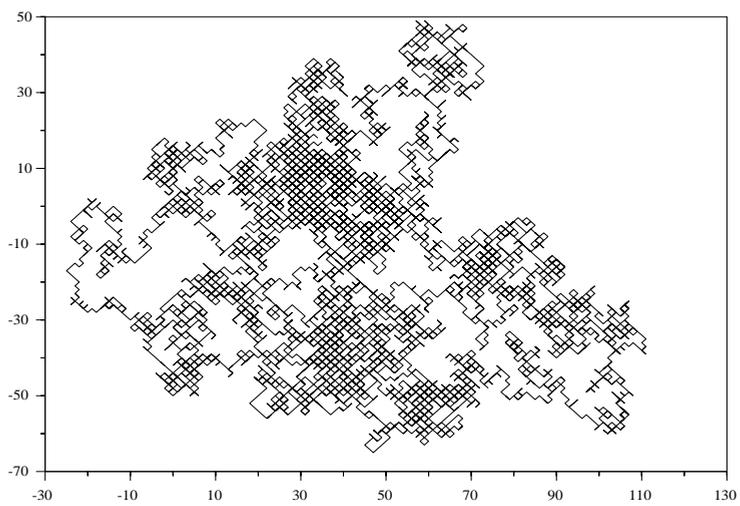
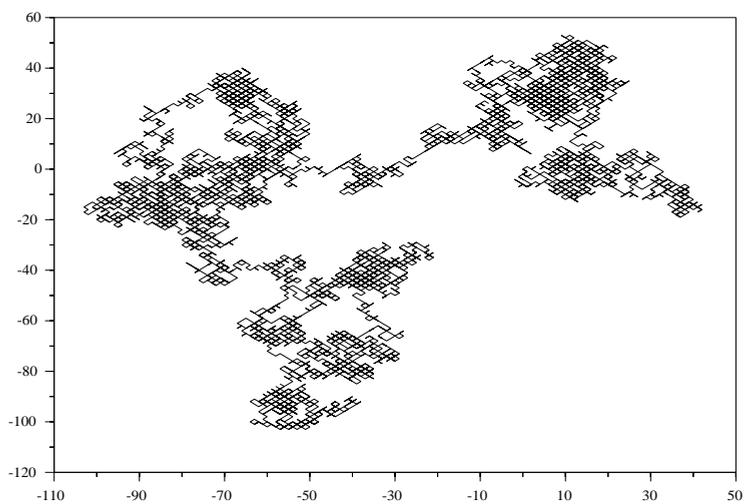


Figure 1.3 *Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^2 .*

En 1921, Polya³ se pose le problème suivant : le marcheur est-il sûr de revenir à sa position de départ ? La réponse dépend crucialement de la dimension du réseau :

Théorème 1.3.1 (Polya, 1921). *Pour $d = 1$ ou 2 la marche aléatoire (X_n) est récurrente :*

$$P(\exists n > 0 : X_n = 0) = 1.$$

Pour $d \geq 3$, elle est transiente :

$$P(\exists n > 0 : X_n = 0) < 1.$$

Nous démontrerons ce résultat dans la section 2.3.2 du chapitre 2.

1.3.1 La constante de Polya

La *constante de Polya* est le nombre

$$p(d) = P(\exists n > 0 : X_n = 0).$$

D'après le théorème 1.3.1, $p(1) = p(2) = 1$ et $p(d) < 1$ pour $d \geq 3$. Des estimations numériques précises de $p(d)$ sont disponibles sur le site internet <http://www.mathsoft.com.alsove/constant/polya/polya.html> pour $d \in \{3, \dots, 64\}$. En voici quelques-unes

$$p(3) = 0,3405373295509991\dots$$

$$p(4) = 0,1932016732249839\dots$$

$$p(10) = 0,0561975359742678\dots$$

$$p(64) = 0,0079380451778596\dots$$

³Mathématicien hongrois né en 1887 et mort en 1985, George Polya a travaillé en théorie des nombres, probabilités, combinatoire et en analyse. Son résultat remarquable sur la marche aléatoire de \mathbb{Z}^d a inspiré de nombreux travaux, et est à l'origine de la théorie des marches aléatoires sur les graphes et les groupes infinis.

1.4 Convolution de Bernoulli

Voici un exemple très simple (mais très riche) de système dynamique aléatoire sur \mathbb{R} . Nous l'obtenons en modifiant légèrement la suite récurrente décrivant la marche de Polya unidimensionnelle.

Soit a un réel positif, $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et (X_n) la suite récurrente aléatoire réelle définie par

$$X_{n+1} = aX_n + \theta_{n+1}.$$

Pour $a = 1$ nous retrouvons la marche de Polya unidimensionnelle étudiée dans la section précédente. Pour $a \neq 1$, la suite (X_n) s'obtient à partir de X_0 en composant aléatoirement les deux applications affines $f_1(x) = ax + 1$ et $f_{-1}(x) = ax - 1$.

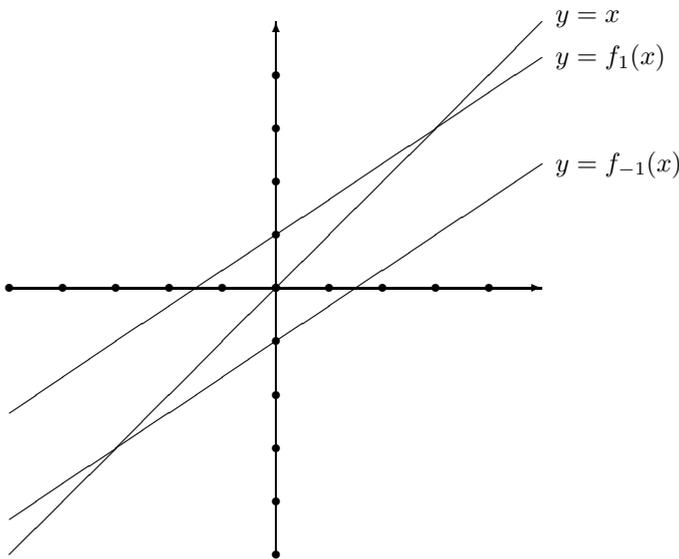


Figure 1.4 Les fonctions f_1 et f_{-1} pour $a = 2/3$.

Pour $a > 1$, le comportement asymptotique de (X_n) présente peu d'intérêt.

Exercice 1.4.1 Montrer que pour $a > 1$

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \{-\infty, +\infty\}) = 1.$$

Pour $0 < a < 1$, nous allons voir que le comportement asymptotique de la suite (X_n) est beaucoup plus riche que ne pourrait le laisser supposer la simplicité du modèle.

Pour tout $n \geq 0$,

$$X_n - a^n X_0 = a^{n-1} \theta_1 + \dots + \theta_n.$$

Soit

$$Y_n = \theta_1 + a\theta_2 + \dots + a^{n-1}\theta_n.$$

Puisque $|a| < 1$, la suite (Y_n) converge vers une variable $Y_\infty \in [-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}]$.

Remarquons que les variables $X_n - a^n X_0$ et Y_n ont la même loi car les vecteurs $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ et $(\theta_n, \dots, \theta_1)$ ont la même loi.

Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(X_n) - \Phi(X_n - a^n X_0)) = 0,$$

car Φ restreinte à $[\frac{-1}{1-a} - |X_0|, \frac{1}{1-a} + |X_0|]$ est uniformément continue. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Phi(X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Phi(Y_n)) = \mathbb{E}(\Phi(Y_\infty)), \quad (1.2)$$

par application du théorème de convergence dominée (voir l'appendice, théorème 8.2.3). Ce type de convergence s'appelle la *convergence en loi* (voir l'appendice) et nous venons donc de prouver l'énoncé suivant.

Proposition 1.4.2 *La suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire Y_∞ .*

Soit ν_a la loi de Y_∞ et $F_a : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sa *fonction de répartition* :

$$F_a(t) = \nu_a([-\infty, t]) = \mathbb{P}(Y_\infty \leq t).$$

Si F_a est continue au point t (c'est-à-dire si $\mathbb{P}(Y_\infty = t) = 0$), la suite de fonctions $(\mathbf{1}_{\{Y_n \leq t\}})_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_{\{Y_\infty \leq t\}}$ et donc, par convergence dominée,

$$F_a(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq t). \quad (1.3)$$

Comme nous verrons bientôt que $F_a(t)$ est continue en tout point, cette propriété de convergence (1.3) est vraie sans restriction. De plus, nous démontrerons dans le chapitre 4 (corollaire 4.4.12) l'énoncé presque sûr suivant.

Proposition 1.4.3 *Pour tout intervalle $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k \in I\}} = \nu_a(I) = F_a(\beta) - F_a(\alpha)$$

presque sûrement.

Les propositions 1.4.2, 1.4.3 et l'équation (1.3) nous éclairent sur le comportement asymptotique de la suite (X_n) . Elles montrent que la suite (X_n) se comporte en première approximation, pour n grand, comme une suite de variables i.i.d. distribuées selon F_a .

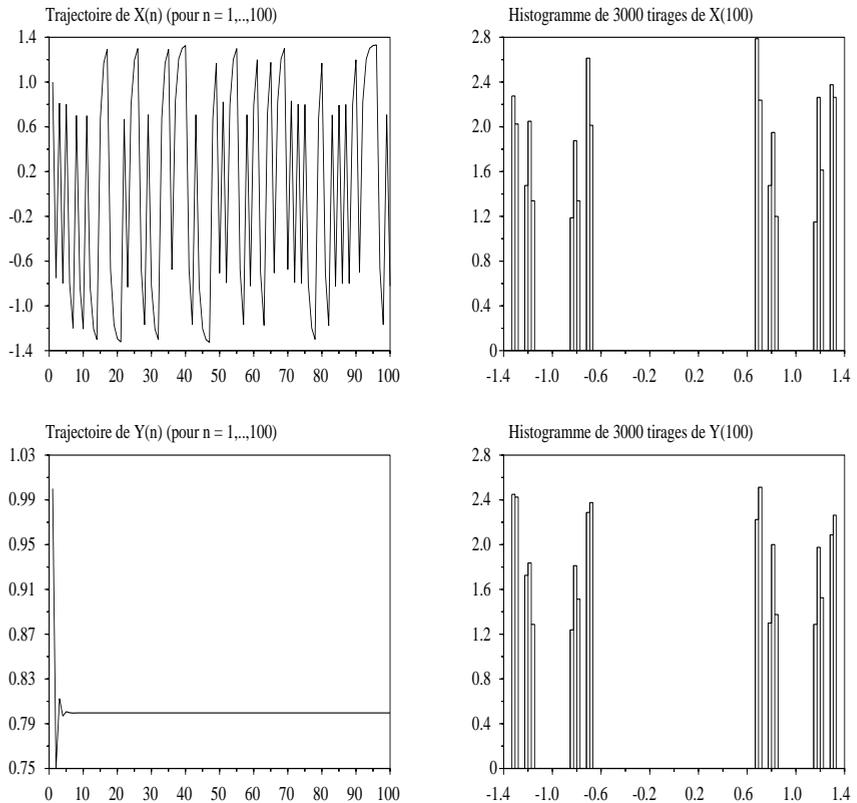


Figure 1.5 *Convolution de Bernoulli pour $a = 0,25$.*

Les résultats de simulations (figures 1.5 et 1.6) illustrent la différence de nature entre les suites (X_n) et (Y_n) . Alors que la suite (Y_n) converge presque sûrement (vers la v.a Y_∞) la suite (X_n) “oscille” aléatoirement. Par contre les histogrammes de (Y_n) et (X_n) “convergent” vers le même histogramme. Cela s’explique par la convergence en loi de (X_n) vers Y_∞ (proposition 1.4.2).

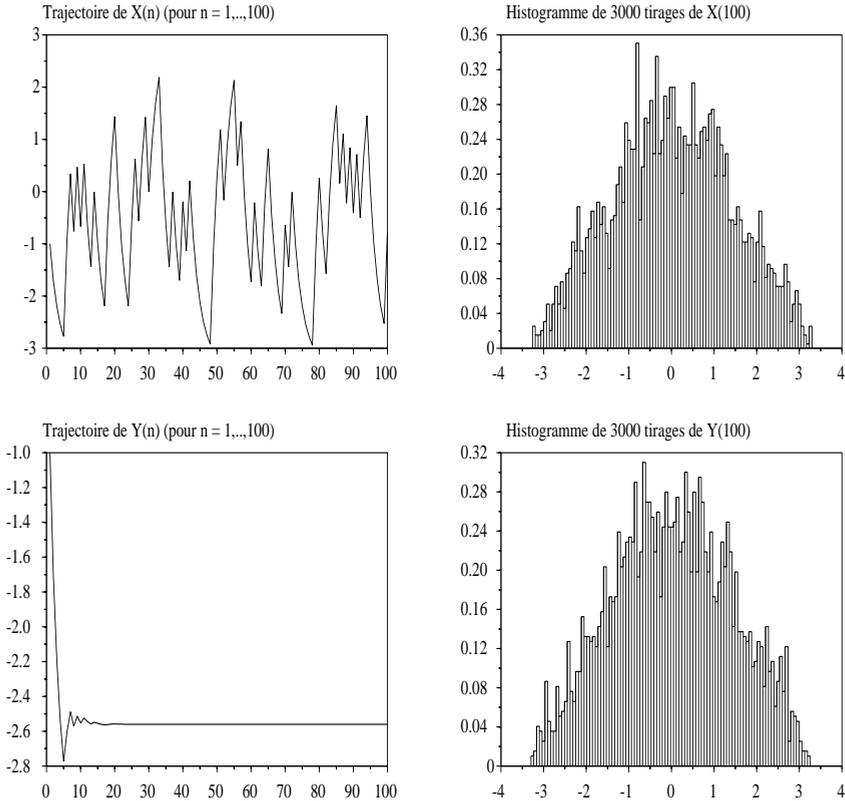


Figure 1.6 *Convolution de Bernoulli pour $a = 0,7$.*

Un problème fascinant, vieux de 70 ans environ, et toujours (partiellement) ouvert est de comprendre les propriétés fines de F_a (et ν_a). Nous allons discuter (et démontrer) quelques-unes de ces propriétés dans les paragraphes suivants.

1.4.1 Autosimilarité

Une première conséquence de (1.3) est la propriété *d'autosimilarité* ci-après.

Proposition 1.4.4 F_a est l'unique fonction de répartition solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \frac{1}{2} \left[G\left(\frac{t-1}{a}\right) + G\left(\frac{t+1}{a}\right) \right]. \quad (1.4)$$

De plus, la fonction F_a est continue.

DÉMONSTRATION :

En effet, puisque la v.a. $Y_\infty^1 = \sum_{k \geq 2} a^{k-2} \theta_k$ est indépendante de θ_1 , et a même loi que Y_∞ , nous pouvons décomposer Y_∞ en

$$Y_\infty = aY_\infty^1 + \theta_1.$$

Par indépendance, nous voyons que

$$P(Y_\infty \leq t) = \frac{1}{2} P\left(Y_\infty \leq \frac{t+1}{a}\right) + \frac{1}{2} P\left(Y_\infty \leq \frac{t-1}{a}\right)$$

qui est en fait l'équation de convolution recherchée.

Réciproquement, si G est une fonction de répartition vérifiant (1.4), choisissons X_0 de loi G . Alors

$$P(X_{n+1} \leq t) = P(aX_n + \theta_{n+1} \leq t) = \frac{1}{2} \left[P\left(X_n \leq \frac{t-1}{a}\right) + P\left(X_n \leq \frac{t+1}{a}\right) \right]$$

et une récurrence immédiate sur n montre que X_n a pour loi G . L'égalité $G = F_a$ se déduit alors de la proposition 1.4.2 et du théorème d'unicité des probabilités (voir l'appendice, théorème 8.1.22).

Pour la continuité de F_a , voir Jessen et Wintner [49].

Remarque 1.4.5 Soit G_n la fonction de répartition de X_n . Alors d'après la preuve de la proposition 1.4.4,

$$G_n = T_a^n(G_0)$$

où T_a est la fonction (définie sur l'ensemble des fonctions de répartition) par la formule

$$T_a(G)(t) = \frac{1}{2} \left[G\left(\frac{t-1}{a}\right) + G\left(\frac{t+1}{a}\right) \right].$$

De même, si G_0 admet une densité g_0 , alors G_n admet pour densité

$$g_n = R_a^n(g_0)$$

où

$$R_a(g)(t) = \frac{1}{2a} \left[g\left(\frac{t-1}{a}\right) + g\left(\frac{t+1}{a}\right) \right].$$

Grâce à cette remarque, il est facile d'écrire un algorithme pour estimer numériquement (puis représenter graphiquement) les fonctions G_n et g_n .

Ci-dessous sont représentées g_n et G_n pour différentes valeurs de a et différentes valeurs de n lorsque X_0 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour comprendre le caractère pour le moins singulier des figures 1.7 et 1.8, il faut lire la section suivante.

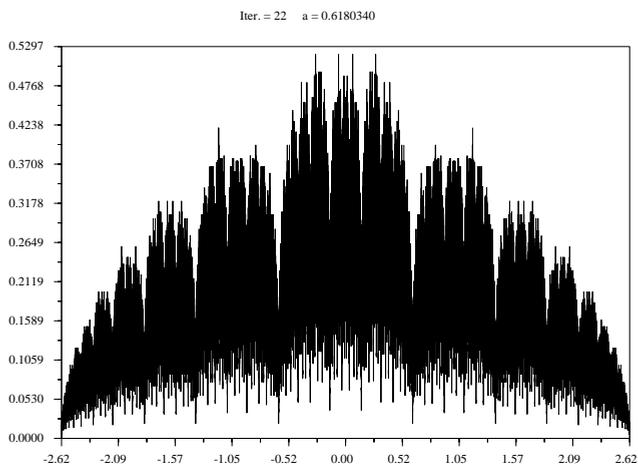


Figure 1.7 Graphe de g_{22} pour $a = 0,6180340$.

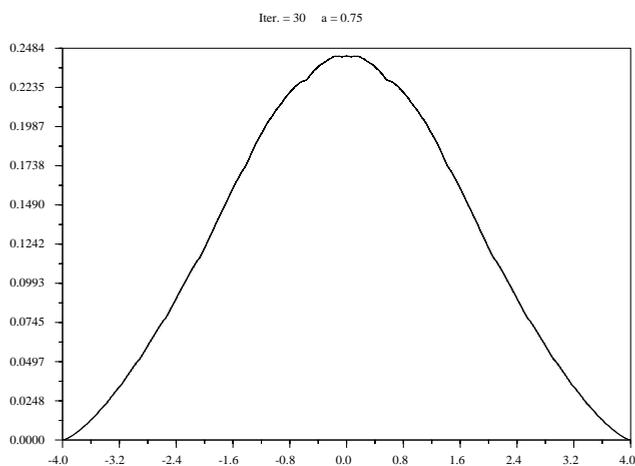


Figure 1.8 *Graphe de g_{30} pour $a = 0,75$.*

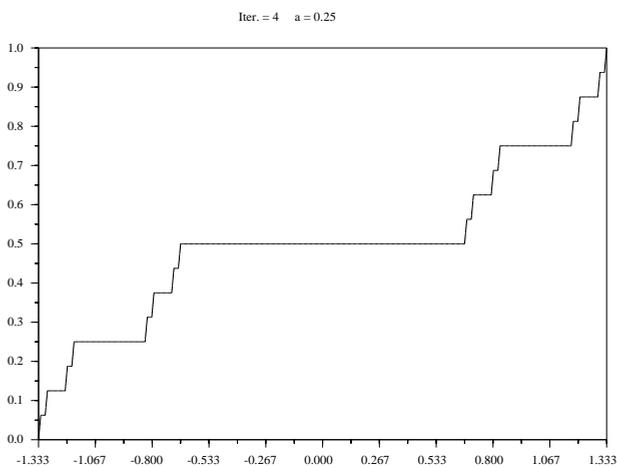


Figure 1.9 *Graphe de G_4 pour $a = 0,25$.*

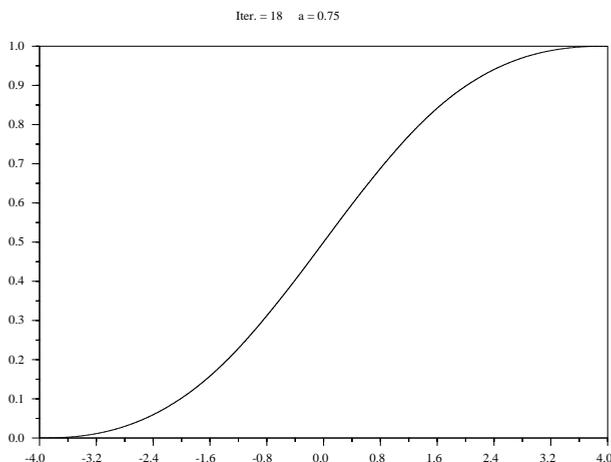


Figure 1.10 Graphe de G_{18} pour $a = 0,75$.

◇

... Pour en savoir plus ...

1.4.2 Propriétés fines

Le *support* de la loi ν_a est, par définition, l'ensemble $K_a \subset \mathbb{R}$ constitué des points $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nu_a(J) > 0$$

pour tout intervalle ouvert J contenant t . De façon équivalente, K_a est l'ensemble des points $t \in \mathbb{R}$ où la fonction F_a est strictement croissante.

$$K_a = \{t \in \mathbb{R} : F_a(t_2) > F_a(t_1) \text{ pour tout } t_1 < t < t_2\}. \quad (1.5)$$

Il est facile de vérifier que K_a est un sous-ensemble fermé (c'est une conséquence immédiate de (1.5)) contenu dans

$$I_a = \left[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a} \right],$$

car $Y_\infty \in I_a$ presque sûrement. De plus

$$K_a = f_1(K_a) \cup f_{-1}(K_a).$$

Cette propriété d'autosimilarité ensembliste est caractéristique des structures *fractales*. Elle se vérifie facilement, en utilisant (1.4).

Le lecteur de ce cours a déjà rencontré des lois discrètes et des lois à densité (voir Comets [3]) mais la typologie des lois sur \mathbb{R} est un peu plus compliquée. Une probabilité ν sur \mathbb{R} de fonction de répartition $F(t) = \nu(-\infty, t]$ est dite

- *continue*, si F est continue ;
- *absolument continue*, si

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$$

où f est une fonction intégrable, positive, d'intégrale 1 (appelée densité) ;

- *discrète*, si il existe un ensemble dénombrable t_1, t_2, \dots et des "poids" $p_i \geq 0$ tels que

$$\nu = \sum_i p_i \delta_{t_i}.$$

Dans ce cas F est en escaliers ;

- *singulière* si il existe un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle et tel que $\nu(N) = 1$.

Remarquons qu'une loi discrète est singulière et qu'une loi absolument continue n'est jamais singulière. En général, et d'après un résultat de théorie de la mesure, une probabilité ν sur \mathbb{R} peut toujours s'écrire

$$\nu = \nu^{ac} + \nu^{cs} + \nu^d \tag{1.6}$$

où ν^{ac} est absolument continue, ν^{cs} est continue singulière (ou bien nulle) et ν^d est discrète (ou bien nulle). Une telle décomposition est unique.

Dans les années 30, le mathématicien Wintner et ses collaborateurs ont cherché à décrire le type de ν_a . Jessen et Wintner [49] démontrent en 1935 que ν_a est absolument continue **ou bien** continue singulière (voir proposition 1.4.6). Kershner et Wintner [50] remarquent que ν_a est singulière pour $a < \frac{1}{2}$ car K_a est un Cantor de mesure de Lebesgue nulle (voir proposition 1.4.8). Pour $a \geq \frac{1}{2}$, $K_a = I_a$ (lemme 1.4.11) et la fonction F_a est donc strictement croissante sur I_a . De plus, Wintner [56] remarque que $\nu_{1/2}$ est la loi uniforme sur $I_{1/2}$ (proposition 1.4.10) et prouve que F_a est dérivable de classe C^{k-1} pour $a = 2^{-1/k}$ et $k \geq 2$. Ces résultats donnent à penser que F_a est absolument continue pour $a \geq \frac{1}{2}$, mais Erdős [45] (théorème 1.4.13) en 1939 infirme cette conjecture en prouvant que ν_a est singulière quand a est l'inverse d'un *nombre de Pisot* ! Un nombre de Pisot est un *entier algébrique* (i.e. la racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers) dont les *conjugués* (i.e. les autres racines) sont de module < 1 . Par exemple, le nombre d'or $g = (\sqrt{5} + 1)/2$ est un nombre de Pisot car c'est la racine du polynôme $x^2 - x - 1$ dont le conjugué $(1 - \sqrt{5})/2$ a un module < 1 . De même les racines positives $\theta_1 \sim 1.32471$ de $x^3 - x - 1$ et $\theta_2 \sim 1.3802777$ de $x^4 - x^3 - 1$ sont des nombres de Pisot (ce sont d'ailleurs les seuls nombres de Pisot contenus dans $]1, \sqrt{2}[$. C'est ainsi que F_a est de classe C^1 pour $a = 2^{-1/2} \sim 0.70710$ mais n'est pas absolument continue pour $a = \frac{1}{\theta_2} \sim 0.72449$ ou $a = \frac{1}{\theta_1} \sim 0.754877$.

Proposition 1.4.6 (Loi des types purs, Jessen and Wintner, 1935 [49]).

Pour tout $0 < a < 1$, si ν_a n'est pas absolument continue elle est nécessairement singulière.

DÉMONSTRATION :

Soient $\nu_a = \nu_a^{ac} + \nu_a^{cs} + \nu_a^d$ la décomposition de ν_a (équation (1.6)) et $\tilde{\nu}_a = \tilde{\nu}_a^{ac} + \tilde{\nu}_a^{cs} + \tilde{\nu}_a^d$ la probabilité dont la fonction de répartition est

$$\tilde{F}_a(t) = \frac{1}{2} \left[F_a \left(\frac{t-1}{a} \right) + F_a \left(\frac{t+1}{a} \right) \right].$$

D'après (1.4), $F_a = \tilde{F}_a$, et donc $\nu_a^\alpha = \tilde{\nu}_a^\alpha$ pour tout $\alpha \in \{ac, cs, d\}$, par unicité de la décomposition (1.6). Comme de plus ν_a est continue, $\nu_a^d = \tilde{\nu}_a^d = 0$. Supposons ν_a non absolument continue. Alors ν_a^{cs} est non nulle et la fonction

$$F_a^{cs}(t) = \frac{1}{\nu_a^{cs}(\mathbb{R})} \nu_a^{cs}([-\infty, t])$$

est une fonction de répartition solution de l'équation fonctionnelle (1.4). Elle est donc nécessairement égale à F_a d'après la proposition 1.4.4. Ce qui prouve que $\nu_a = \nu_a^{cs}$.

Remarque 1.4.7 La preuve originelle de Jessen et Wintner de la proposition ci-dessus est différente car Jessen et Wintner voyaient ν_a comme la loi de Y_∞ et non pas comme la loi limite de la récurrence aléatoire (X_n) . Or, c'est cette dernière interprétation qui nous a permis de démontrer l'**unicité** de la solution de l'équation (1.4) (voir la proposition 1.4.4) sur laquelle repose entièrement la preuve donnée ici de la proposition 1.4.6.

Proposition 1.4.8 (Kershner and Wintner, 1935 [50]). *Pour $a < \frac{1}{2}$, ν_a est continue singulière. Plus précisément, l'ensemble K_a est un Cantor de mesure de Lebesgue nulle.*

DÉMONSTRATION :

Pour $a < \frac{1}{2}$, Y_n prend au plus 2^{n-1} valeurs distinctes et le reste $r_n = Y_\infty - Y_n$ a un module $\leq \frac{a^{n-1}}{a-1}$. La mesure ν_a est donc concentrée sur une réunion d'intervalles de longueur totale $l_n = 2^{n-1}a^{n-1}/(1-a)$. Comme $l_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, K_a est de mesure de Lebesgue nulle et ν_a est singulière.

Remarque 1.4.9 Pour $a < \frac{1}{2}$, la fonction F_a est un *escalier du diable* : une fonction continue croissante non constante mais presque partout constante ! Le graphe de la fonction de répartition de Y_n donne, pour n assez grand, une idée de l'allure d'une telle fonction.

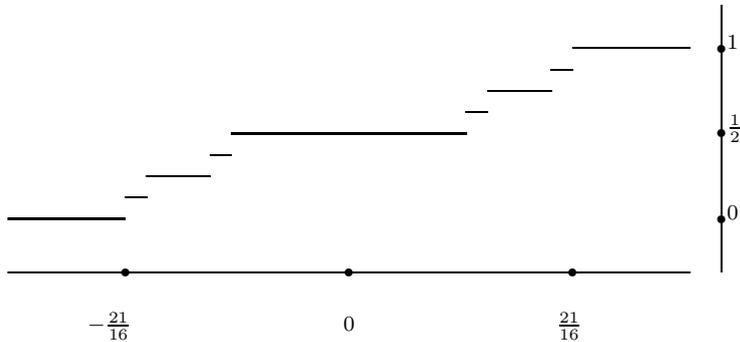


Figure 1.11 La fonction de répartition de Y_3 pour $a = \frac{1}{4}$.

Le cas $a = \frac{1}{2}$ est très particulier.

Proposition 1.4.10 (Wintner, 1935 [56]). $\nu_{1/2}$ est la probabilité uniforme sur $[-2, 2]$.

DÉMONSTRATION :

Soit $\Phi_t(Y_\infty) = \mathbf{E}(e^{itY_\infty})$ la fonction caractéristique de Y_∞ . Alors

$$\Phi_t(Y_\infty) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{ita^k} + e^{-ita^k}) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(ta^k). \tag{1.7}$$

Pour $a = \frac{1}{2}$, il s'agit de la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-2, 2]$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{itx} dx &= \frac{\sin(2t)}{2t} = \frac{\sin(t) \cos(t)}{t} = \frac{\sin(2(t/2))}{2(t/2)} \cos(t) = \\ &= \frac{2^n}{t} \sin(t/2^n) \prod_{k=0}^n \cos(t/2^k) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(t(\frac{1}{2})^k). \end{aligned}$$

Nous passons maintenant au cas $a > \frac{1}{2}$.

Lemme 1.4.11 Pour $a \geq \frac{1}{2}$, $K_a = I_a$. La fonction F_a est donc strictement croissante sur I_a .

DÉMONSTRATION :

Nous allons montrer que l'ensemble

$$S = \left\{ \sum_{k=0}^n a^k \xi_k, n \geq 0, \xi_0, \dots, \xi_n \in \{-1, 1\} \right\}$$

est dense dans $\left[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right]$. Par conséquent, pour tout intervalle

$$J =]\alpha, \beta[\subset [-(1-a)^{-1}, (1-a)^{-1}]$$

et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha + a^N/(1-a) < \beta - a^N/(1-a)$$

il existe $n \geq N$ tel que

$$\mathbf{P}(Y_n \in]\alpha + a^N/(1-a), \beta - a^N/(1-a)[) \geq \frac{1}{2} > 0.$$

D'où

$$\mathbf{P}(Y_\infty \in J) > 0.$$

Nous démontrons maintenant la densité de S . Posons $I_+ = [(1-2a)/(1-a), 1/(1-a)]$ et $I_- = [-1/(1-a), (2a-1)/(1-a)]$. Alors $I_a = I_+ \cup I_-$, $f_{-1}(I_a) = I_-$ et $f_1(I_a) = I_+$. Maintenant, étant donné $x \in I$, soit $(x_n, \xi_n) \in I \times \{-1, 1\}$ la suite définie par

(a) $x = x_0$;

(b) si $x_n \in I_+$ alors $\xi_n = +1$, sinon $\xi_n = -1$.

Alors $x_{n+1} = \frac{x_n - \xi_n}{a}$ (i.e. $f_{\xi_n}(x_{n+1}) = x_n$). D'où

$$a^{n+1}x_{n+1} - x = - \sum_{k=0}^{n+1} a^k \xi_k.$$

Et donc

$$\left| x - \sum_{k=0}^{n+1} a^k \xi_k \right| \leq a^n/(1-a).$$

Pour $a > \frac{1}{2}$, la fonction F_a semble donc plutôt régulière, mais comme nous l'avons déjà signalé, Erdős [45] en 1939 a prouvé que ν_a est singulière pour $a = \frac{1}{g}$ et g est nombre de Pisot, c'est-à-dire

(a) g est la racine d'un polynôme unitaire $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0$ à coefficients dans \mathbb{Z} ;

(b) les autres racines g_2, \dots, g_m de P sont de module < 1 .

La preuve d'Erdős repose sur un lemme classique d'analyse que nous rappelons sans démonstration. Le lecteur pourra facilement prouver ce résultat en s'inspirant de l'exercice 3.2.12 de Bony [1].

Lemme 1.4.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx = 0.$$

Théorème 1.4.13 (Erdős, 1939 [45]). Soit $1 < g < 2$ un nombre de Pisot et $a = 1/g$. Alors ν_a est singulière.

DÉMONSTRATION :

En vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, il suffit de prouver que la fonction caractéristique de Y_∞ ne converge pas vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

L'expression $g^n + g_2^n + \dots + g_m^n$ est un polynôme symétrique des racines et peut donc s'écrire comme un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} des fonctions symétriques élémentaires $\sum g_i = -a_{m-1}$, $\sum_{i < j} g_i g_j = a_{m-2}, \dots, a_0 = \sum_{i_1 < \dots < i_m} a_{i_1} \dots a_{i_m}$. Ainsi $g^n + g_2^n + \dots + g_m^n \in \mathbb{Z}$ et

$$\text{dist}(g^n, \mathbb{Z}) \leq \theta^n$$

pour un certain $0 < \theta < 1$.

Soit $a = 1/g$ et $t(n) = \pi g^n$. D'après (1.7),

$$\Phi_{t(n)}(Y_\infty) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(g^{n-k}\pi) = \prod_{k=0}^n \cos(g^k\pi) C$$

où

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(a^k\pi)$$

est non nul, car $\cos(a^k\pi) \neq 0$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$,

$$||\cos(g^k\pi) - \cos(p\pi)|| \leq \pi|g^k - p|,$$

et donc, par définition de $\theta < 1$,

$$||\cos(g^k\pi) - 1| \leq \pi\theta^k.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_{t(n)}(Y_\infty)| = |C| \prod_{k=0}^{\infty} |\cos(g^k\pi)| > 0.$$

1.4.3 Le problème d'Erdős

Soit $CS \subset]\frac{1}{2}, 1[$ l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles ν_a est singulière. Le théorème d'Erdős pose le problème de la description de CS . En 1995, Solomyak [55] (voir aussi la très belle preuve de Solomyak et Peres [53]) a démontré que CS est de mesure de Lebesgue nulle, résolvant ainsi une conjecture datant des années 60. Mais, à ce jour, on ne sait toujours pas si CS contient des points qui ne sont pas des inverses de nombres de Pisot. Le lecteur intéressé par ces questions pourra consulter l'article de Peres, Schlag et Solomyak [52].

◇

1.5 Simulation de fractales

Une généralisation multidimensionnelle de la dynamique de la section 1.4 est la récurrence aléatoire définie sur \mathbb{R}^d par

$$X_{n+1} = A(\theta_{n+1})X_{n+1} + B(\theta_{n+1})$$

où les variables (θ_n) sont i.i.d. à valeurs dans $\{1, \dots, k\}$, $\{A(1), \dots, A(k)\}$ sont k matrices $d \times d$ à coefficients réels et $\{B(1), \dots, B(k)\}$ k vecteurs de \mathbb{R}^d .

Si A est une matrice $d \times d$ et $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^d , rappelons que la norme de A (notée $\|A\|$) est définie par

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}.$$

Supposons $\|A(i)\| < 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Alors la suite (Y_n) de terme général

$$Y_n = B(\theta_1) + A(\theta_1)B(\theta_2) + \dots + \left[\prod_{j=1}^n A(\theta_j) \right] B(\theta_{n+1})$$

converge presque sûrement vers une variable aléatoire $Y_\infty \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 1.5.1 *Supposons que $\|A(i)\| < 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Alors*

- (i) *la suite (X_n) converge en loi vers Y_∞ ;*
- (ii) *la loi π de Y_∞ est l'unique probabilité sur \mathbb{R}^d solution de l'équation*

$$\pi = \sum_{i=1}^k m(i)\pi \circ f_i^{-1}$$

où f_i désigne l'application affine $x \rightarrow A(i)x + B(i)$ et $m(i) = P(\theta_n = i)$.

Exercice 1.5.2 Démontrer la proposition précédente (on pourra s'inspirer des preuves des propositions 1.4.2 et 1.4.4).

Tout comme dans le cas des convolutions de Bernoulli, ce résultat de convergence en loi s'accompagne d'un théorème de convergence presque sûre.

Proposition 1.5.3 *Sous les hypothèses, et avec les notations, de la proposition 1.5.1,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(X_k) = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x)\pi(dx)$$

presque sûrement, pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

Ce théorème ergodique (dont la preuve sera donnée dans le chapitre 4, corollaire 4.4.12) permet, pour $d = 1, 2$ ou 3 , de “visualiser” le support π à partir de la représentation graphique d'une trajectoire X_0, X_1, \dots particulière. Dans une image en noir

et blanc, les zones blanches (non visitées) n'appartiennent pas au support de π et les régions visitées sont d'autant plus foncées qu'elles sont chargées par π . Voici quelques images obtenues en dimension 2. La structure fractale est liée à la propriété d'autosimilarité de π (proposition 1.5.1 (ii)). Pour d'autres images et des développements on pourra consulter Barnsley [13].

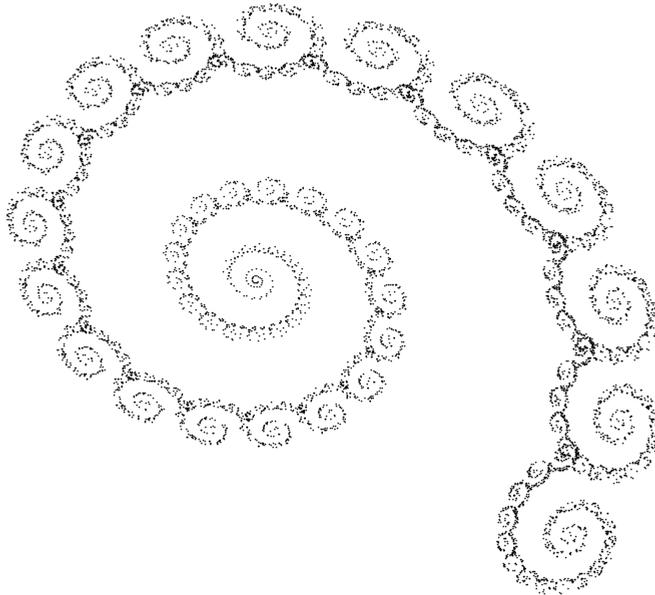
Une spirale

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0.839 & -0.303 \\ 0.383 & 0.924 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} -0.161 & -0.136 \\ 0.138 & -0.182 \end{bmatrix},$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 0.232 \\ -0.080 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0.921 \\ 0.178 \end{bmatrix}$$

et $m(1) = m(2) = \frac{1}{2}$.

Spirale



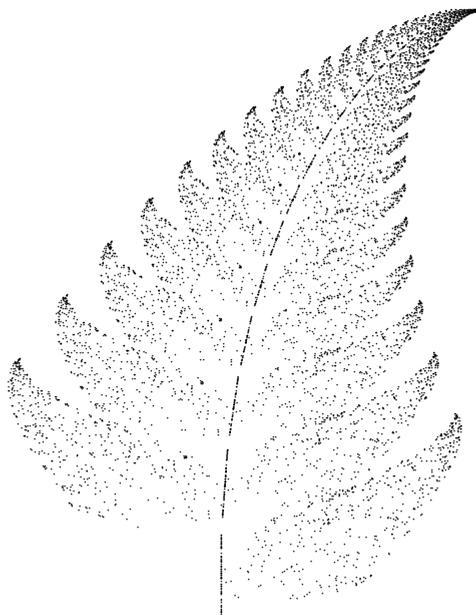
Une Feuille

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, A(3) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, A(4) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}$$

$$B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, B(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, B(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

et $m(1) = 0.01, m(2) = 0.07, m(3) = 0.07, m(4) = 0.85$

Feuille



Chapitre 2

Chaînes de Markov

Les suites récurrentes étudiées dans le chapitre 1 vérifient trivialement la propriété suivante : *la loi de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots connaissant la trajectoire passée X_0, \dots, X_n ne dépend que de X_n* . Connue sous le nom de **propriété de Markov**, cette forme simple de causalité autorise un développement théorique fécond qui permet d'étudier le comportement asymptotique de nombreux modèles d'évolution stochastique.

L'objet de ce chapitre est de présenter la théorie des chaînes de Markov. À l'exception de la section 2.4, nous nous limiterons au cas particulier (essentiel) où l'espace des états est un ensemble dénombrable.

2.1 Matrices de transition et chaînes de Markov

Dans toute cette section M désigne un ensemble dénombrable.

Définition 2.1.1 *Une matrice de transition sur M est une application $P : M \times M \rightarrow [0, 1]$, telle que*

$$\sum_y P(x, y) = 1.$$

Une chaîne de Markov de matrice de transition P est une suite de v.a. (X_n)

définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans M , telle que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1}) \quad (2.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite (x_0, \dots, x_{n+1}) d'éléments de M .

Proposition 2.1.2 (i) Soit (f, m) un système dynamique aléatoire sur M . Alors

(a) la matrice P définie par

$$P(x, y) = m(\theta \in \Theta : f_\theta(x) = y)$$

est une matrice de transition appelée la matrice induite par (f, m) ;

(b) toute trajectoire (X_n) de (f, m) est une chaîne de Markov de matrice P .

(ii) Réciproquement, soit P une matrice de transition sur M . Alors il existe une application $f : [0, 1] \times M \rightarrow M$ telle que P soit la matrice induite par (f, λ) , où λ désigne la loi uniforme sur $[0, 1]$.

DÉMONSTRATION :

(i). L'assertion (a) est évidente. Pour prouver (b) notons que, par indépendance des (θ_n) ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(f(\theta_{n+1}, x_n) = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(f(\theta_{n+1}, x_n) = x_{n+1}) \mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Puisque M est dénombrable, on peut supposer que $M = \{1, 2, \dots\}$. Pour $i, j \in M$ notons $\tau(i, j) = P(i, 1) + \dots + P(i, j)$ et $\tau(i, 0) = 0$. Soit $\Theta = [0, 1]$, λ la probabilité uniforme sur Θ et $f : \Theta \times M \rightarrow M$ l'application définie par $f(\theta, i) = j$ pour $\tau(i, j-1) \leq \theta < \tau(i, j)$. Il est clair que P est induite par (f, λ) .

Remarque 2.1.3 La proposition 2.1.2 (ii) montre qu'une chaîne de Markov peut toujours être vue comme une suite récurrente aléatoire $X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n)$ avec (θ_n) une suite de v.a. i.i.d. sur $[0, 1]$ de loi uniforme. Ceci prouve en particulier que

(a) les chaînes de Markov existent ; et

(b) sont facilement "simulables" à partir d'un générateur de loi uniforme.

Exemple 2.1.4 (Battre les cartes). La matrice de transition associée au battage de carte de l'exemple 1.2 est donnée par

$$P(x, y) = m(\theta \in S : \theta \circ x = y) = m(y \circ x^{-1})$$

si $y \circ x^{-1} \in S$, et $P(x, y) = 0$ sinon.

Exemple 2.1.5 (Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d). La matrice de transition de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d (voir l'exemple 1.3) est donnée par

$$P(x, y) = \frac{1}{2d}$$

si $x - y \in \{e_1, \dots, e_d, -e_1, \dots, -e_d\}$, et $P(x, y) = 0$ sinon.

Exemple 2.1.6 (L'urne d'Ehrenfest). Dans un récipient divisé en deux enceintes par une paroi poreuse sont réparties N molécules de gaz. À chaque unité de temps une molécule choisie au hasard change d'enceinte. Ce modèle proposé par Tatiana et Paul Ehrenfest est un modèle simplifié de diffusion gazeuse. Nous reviendrons sur cet exemple à plusieurs reprises pour illustrer les concepts introduits et les résultats obtenus sur les chaînes finies.

- (i) (Vision microscopique). L'état du système est représenté par un vecteur $x = (x^i) \in \{0, 1\}^N$ où la i^{e} composante x^i vaut 1 ou 0 selon que la i^{e} particule est dans la première ou la seconde enceinte. L'espace d'états est alors l'hypercube $\{0, 1\}^N$ et la matrice de transition associée à cette description microscopique est $P(x, y) = \frac{1}{N}$ si $\sum_i |x_i - y_i| = 1$ et $P(x, y) = 0$ sinon.
- (ii) (Vision macroscopique). Considérons maintenant la grandeur macroscopique $s = \sum_{i=1}^N x_i$ représentant le nombre de particules dans la première enceinte. L'évolution de s est décrite par la matrice de transition Q définie sur $\{0, \dots, N\}$ par

$$Q(x, x+1) = 1 - \frac{x}{N}$$

pour $x < N$,

$$Q(x, x-1) = \frac{x}{N}$$

pour $x > 0$, et $Q(x, y) = 0$ dans les autres cas.

Le système dynamique qui modélise la vision microscopique est naturel, puisque le passage d'un état à un autre se fait en tirant une molécule au hasard parmi N et en regardant l'enceinte dans laquelle elle se trouve. En d'autres termes, si θ_i est la v.a.

qui décrit le choix au hasard d'un indice k à la i^e étape, la fonction f qui définit le système dynamique est donnée par

$$f(k, (x^1, \dots, x^k, \dots, x^N)) = (x^1, \dots, 1 - x^k, \dots, x^N).$$

Lorsqu'on adopte le point de vue macroscopique, le système dynamique à associer est moins naturel. On peut par exemple tirer une suite de nombres (θ_n) au hasard dans $[0, 1]$ et poser

$$S_{n+1} = S_n + (1 - 2\mathbf{1}_{]0, S_n/N]}) (\theta_{n+1}).$$

L'exemple suivant montre que certains phénomènes aléatoires se forment beaucoup plus naturellement en termes de chaînes de Markov qu'en termes de systèmes dynamiques.

Exemple 2.1.7 (Pannes aléatoires). Une machine se met en route à l'instant 0 et possède une durée de vie aléatoire X , v.a. entière de loi $(p(x))_{x \geq 1}$ ($p(x) > 0, \forall x$). À l'instant où elle tombe en panne, elle est remplacée par une machine identique, de durée de vie donc de même loi mais indépendante de la première et ainsi de suite. On note X_1, X_2, \dots les durées de vie successives des machines et A_t l'âge de la machine en fonctionnement à l'instant t (entier ≥ 0). Par convention si une machine tombe en panne à l'instant t , A_t est l'âge de sa remplaçante soit 0.

Il n'est pas possible d'écrire naturellement la suite (A_t) comme un système dynamique aléatoire. Nous allons montrer que c'est néanmoins une chaîne de Markov.

Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_t, \dots)$ une suite (finie ou infinie) d'entiers. Nous dirons que a est une *suite d'âges* si et seulement si $a_1 = 1, a_{i+1} \in \{a_i + 1, 0\}$ et $a_i = 0 \Rightarrow a_{i+1} \neq 0$. Il est clair, avec cette définition, que la suite (A_1, A_2, \dots) est une suite d'âges. Étant donnée une suite d'âges a et $t \geq 1$ un entier, notons

$$n(a, t) = 1 + \sum_{i=1}^t \mathbf{1}_{\{a_i=0\}},$$

$$s_0(a) = 0, s_1(a) = \min\{i \geq 1 : a_i = 0\},$$

$$s_{i+1}(a) = \min\{i > s_i(a) : a_i = 0\},$$

et

$$x_i(a) = s_i(a) - s_{i-1}(a)$$

pour $i \geq 1$. L'entier $n(a, t)$ donne le numéro de la machine en marche à l'instant t alors que $x_i(a)$ est la durée de vie de la machine numéro i .

Soit maintenant $a = (a_1, \dots, a_t)$ une suite d'âges de longueur t . Alors

$$\begin{aligned} \{A_1 = a_1, \dots, A_t = a_t\} &= \{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a), A_t = a_t\} \\ &= \{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a), X_{n(a,t)} > a_t\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &P(A_{t+1} = 0 | A_t = a_t, \dots, A_1 = a_1) = \\ &= \frac{P(\{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)} = x_{n(a,t)}(a) = a_t + 1\})}{P(\{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a), X_{n(a,t)} > a_t\})} \\ &= \frac{P(\{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a)\})P(X_{n(a,t)} = a_t + 1)}{P(\{X_1 = x_1(a), \dots, X_{n(a,t)-1} = x_{n(a,t)-1}(a)\})P(X_{n(a,t)} > a_t)} \\ &= \frac{P(X = a_t + 1)}{P(X > a_t)} \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité se déduit de l'indépendance des variables (X_i) . Comme $A_{t+1} \in \{0, A_t + 1\}$, nous avons donc bien montré que (A_t) est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} dont la matrice de transition est donnée par $P(0, 1) = 1$,

$$P(a, a + 1) = \frac{P(X > a + 1)}{P(X > a)} = 1 - P(a, 0)$$

pour $a \geq 1$, et $P(a, b) = 0$ pour $b \notin \{0, a + 1\}$.

Remarque 2.1.8 La proposition 2.1.2 (i) associe à tout système dynamique aléatoire sur M une matrice de transition et, en vertu de la proposition 2.1.2 (ii), cette application est surjective. Il est important de souligner qu'elle n'est pas injective, et des systèmes dynamiques aléatoires aux comportements (trajectoriels) très différents peuvent avoir la même matrice de transition. Voici un exemple. Soit $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (que l'on peut voir comme p points équirépartis sur un cercle), $h : M \rightarrow M$ une application, et $f^h : M \times M \rightarrow M$ l'application définie par

$$f^h(\theta, z) = h(z) + \theta.$$

Soit m la mesure uniforme sur M , c'est-à-dire $m(x) = \frac{1}{p}$ pour tout $x \in M$. Il est facile de voir que la matrice induite par le système dynamique (f^h, m) est

$$P^h(x, y) = m(y).$$

Ainsi, si $(X_n^{h,x})$ est la suite définie par

$$X_{n+1}^{h,x} = f(\theta_{n+1}, X_n^{h,x}), X_0^{h,x} = x,$$

les variables $(X_1^{h,x}, X_2^{h,x}, \dots)$ sont i.i.d. de loi uniforme dans S^1 . D'un point de vue statistique, les suites $(X_n^{h,x})$ obtenues pour différentes fonctions h ne sont donc pas distinguables (elles ont toutes la même loi). Elles ont par contre des comportements trajectoriels différents. Supposons, par exemple, $h(z) = z$. Alors $X_n^{h,x} - X_n^{h,y} = x - y$ pour tout $n \geq 0$. Si par contre $h(z) = 0$, alors $X_n^{h,x} - X_n^{h,y} = 0$ pour $n \geq 1$.

2.1.1 Équation de Chapman-Kolmogorov

Nous allons établir ici une (sinon la) propriété fondamentale des chaînes de Markov, l'équation de Chapman-Kolmogorov¹. Il s'agit d'une équation de conservation qui caractérise l'évolution temporelle de la loi du système.

L'opérateur P

Il est souvent très utile de voir la matrice P comme un opérateur agissant sur les fonctions et les mesures de la façon suivante. L'opérateur P transforme une fonction mesurable bornée $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ en une fonction mesurable bornée $Ph : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Ph(x) = \sum_y P(x, y)h(y) \quad (2.2)$$

et une mesure positive (respectivement une probabilité) μ sur M en une mesure positive (une probabilité) μP définie par

$$\mu P(y) = \sum_x \mu(x)P(x, y). \quad (2.3)$$

Le produit matriciel usuel (ou encore l'itération de la formule (2.2)) permet de définir une nouvelle matrice de transition P^n . Pour tout $(x, y) \in M \times M$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit par récurrence

$$P^{n+1}(x, y) = (P \times P^n)(x, y) = \sum_z P(x, z)P^n(z, y), \quad n \geq 1$$

et $P^1 = P$.

¹Aussi appelée "l'équation maîtresse" dans la "littérature" physique.

Théorème 2.1.9 Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov sur M de matrice de transition P . Alors

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(\{x_0\})p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n) \quad (2.4)$$

où μ_0 désigne la loi de X_0 . En particulier,

(i) la loi μ_n de X_n vérifie la relation de récurrence (équation de Chapman-Kolmogorov)

$$\mu_{n+1} = \mu_n P = \mu_0 P^{n+1};$$

(ii) pour tout $x, y \in M$

$$P(X_n = y | X_0 = x) = P^n(x, y);$$

(iii) pour toute fonction $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ bornée

$$E(h(X_n) | X_0 = x) = P^n h(x).$$

DÉMONSTRATION :

Par définition d'une chaîne de Markov,

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_{n+1} = x_{n+1}) = P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)p(x_n, x_{n+1}).$$

D'où l'on déduit (2.4) par une récurrence immédiate.

(i) Pour tout $x \in M$,

$$\mu_{n+1}(x) = P(X_{n+1} = x) = \sum_y P(X_{n+1} = x, X_n = y) = \sum_y \mu_n(y)P(y, x) = (\mu_n P)(x).$$

(ii) On applique (i) avec $\mu_0 = \delta_x$.

(iii)

$$E(h(X_n)) = \sum_y h(y)\mu_n(y) = \sum_y h(y)(\mu P^n)(y).$$

Pour $\mu_0 = \delta_x$, on en déduit que

$$P(X_n = y | X_0 = x) = \sum_y h(y)P^n(x, y) = P^n h(x).$$

Exemple 2.1.10 (Transmission d'un message). Un message codé de façon binaire est transmis à travers un réseau. Chaque bit est transmis avec une probabilité d'erreur :

- égale à a pour un passage de 0 à 1 ($a \neq 0$ et 1) ;
- égale à b pour un passage de 1 à 0 ($b \neq 0$ et 1).

Le résultat de la transmission au n^e relais est noté X_n . On suppose que les relais se comportent indépendamment les uns des autres et que les erreurs sur les bits sont indépendantes. On souhaite calculer la taille critique du réseau au-delà de laquelle la probabilité de recevoir un message erroné est supérieure à ϵ .

Soit l la longueur du message. Nous supposons dans un premier temps que $l = 1$. La suite (X_n) a comme matrice de transition sur $\{0, 1\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

Soit $g_n = P(X_n = 0)$. D'après le théorème 2.1.9,

$$g_{n+1} = (1-a)g_n + b(1-g_n).$$

Notons $g = \frac{b}{a+b}$ le point fixe de cette équation. Alors

$$g_n - g = (1-a-b)^n(g_0 - g).$$

La probabilité pour que le message X_n ne soit pas erroné est donc

$$r_n(0) = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n$$

si $X_0 = 0$, et

$$r_n(1) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n$$

si $X_0 = 1$.

Supposons maintenant $l > 1$. Alors $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^l)$ où les variables X_n^1, \dots, X_n^l sont indépendantes de même loi. La probabilité pour que le message X_n ne soit pas erroné est alors

$$r_n = \prod_{i=1}^l r_n(X_0^i) \geq [\alpha + (1-\alpha)(1-a-b)^n]^l$$

où $\alpha = \inf(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$. La taille du réseau doit être choisie inférieure à

$$n_c = \frac{\ln(1-\alpha) - \ln((1-\epsilon)^{1/l} - \alpha)}{-\ln(1-a-b)}.$$

2.1.2 Probabilités invariantes

Définition 2.1.11 Une probabilité π sur M est dite **invariante** (ou **stationnaire**) pour P si c 'est un point fixe de l'équation de Chapman-Kolmogorov, c'est-à-dire

$$\pi = \pi P.$$

Si X_0 est de loi π , probabilité invariante, alors (d'après la proposition 2.1.9) X_n est de loi π pour tout $n \geq 0$. D'un point de vue statistique, le système décrit par le système dynamique est donc dans un *état d'équilibre*.

Exemple 2.1.12 La loi uniforme sur M est une probabilité invariante pour le système dynamique associé au mélange de cartes (section 1.2 et exemple 2.1.4). La vérification immédiate est laissée au lecteur.

L'exemple suivant montre que les probabilités invariantes n'existent pas toujours.

Exemple 2.1.13 (Marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}). Reprenons l'exemple de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} (section 1.3 et exemple 2.1.5). Supposons qu'il existe une probabilité invariante π . Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$$\pi(n) = \frac{1}{2}(\pi(n+1) + \pi(n-1)).$$

D'où

$$\pi(n+1) - \pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1) = \pi(1) - \pi(0).$$

En sommant sur n on voit que nécessairement $\pi(1) = \pi(0) = 0$ et donc $\pi(n) = 0$. Une contradiction.

Exercice 2.1.14 Montrer que la probabilité uniforme est invariante pour la chaîne associée à la description microscopique de l'urne d'Ehrenfest (exemple 2.1.6). En déduire l'existence d'une probabilité invariante pour la chaîne associée à la description macroscopique.

Chaînes réversibles

Définition 2.1.15 Soit π une probabilité sur M . La matrice de transition P (respectivement la chaîne X) est dite **réversible** par rapport à π si

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$$

pour tout $x, y \in M$.

Proposition 2.1.16 Si P est réversible par rapport à π alors π est une probabilité invariante.

DÉMONSTRATION :

Soit μ une probabilité invariante. Alors μ est caractérisée par le système d'équations

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x)P(x, y) = \mu(y) \left(1 - \sum_{x:x \neq y} P(y, x) \right) + \sum_{x:x \neq y} \mu(x)P(x, y).$$

D'où

$$\mu(y) \sum_{x:x \neq y} P(y, x) = \sum_{x:x \neq y} \mu(x)P(x, y).$$

Sous cette forme, il est évident que π est solution.

La réversibilité, parfois appelée condition du "bilan détaillé", est une propriété qui est souvent vérifiée (ou supposée vérifiée) par des systèmes physiques (voir Georges et Mezard [7]). Elle signifie qu'à l'équilibre, la loi de la suite X_0, \dots, X_n est invariante par retournement du temps. En effet

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \pi(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n) \\ &= \pi(x_1)P(x_1, x_0)[P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n)] = \dots = \pi(x_n)P(x_n, x_{n-1}) \dots P(x_1, x_0) \\ &= P(X_n = x_0, \dots, X_0 = x_n). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.17 (L'urne d'Ehrenfest, (ii)). Revenons sur la description macroscopique de l'urne d'Ehrenfest (exemple 2.1.6). Dans ce modèle la loi binomiale

$$\mu_N(x) = \frac{1}{2^N} C_N^x$$

de paramètres $(N, 1/2)$ est réversible, donc invariante. On pourra comparer cette approche avec celle de l'exercice 2.1.14.

Exercice 2.1.18 (Chaînes bistochoastiques). Une matrice de transition P sur M est dite *bistochoastique* si $\sum_x P(x, y) = 1$ pour tout $y \in M$.

1) Soit P une matrice bistochoastique. Montrer que la loi uniforme est une probabilité invariante.

2) Soit M un groupe (fini) muni d'une loi notée \circ (par exemple le groupe des permutations introduit dans l'étude de l'exemple 1.2) engendré par $S \subset G$. Soient θ_n des variables i.i.d. à valeurs dans S . Montrer que la chaîne (X_n) définie par

$$X_{n+1} = \theta_{n+1} \circ X_n$$

est bistochoastique.

2.1.3 Propriété de Markov

La formule (2.1), caractéristique des chaînes de Markov, s'étend sans difficulté en la formule plus générale

$$\begin{aligned} P(X_{k+n} = x_{k+n}, \dots, X_{k+1} = x_{k+1} | X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) \\ = P(X_{k+n} = x_{k+n}, \dots, X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k) \\ = P(X_n = x_{k+n}, \dots, X_1 = x_{k+1} | X_0 = x_k). \end{aligned} \quad (2.5)$$

En effet, ceci est une conséquence immédiate de la formule (2.4) (voir le théorème 2.1.9) et de la formule de Bayes. L'objet de cette section est de généraliser (2.5) à la situation où l'événement dont on cherche à évaluer la probabilité conditionnelle dépend d'une infinité de valeurs de (X_n) . À titre d'exemple, soit E_m l'événement :

{la suite (X_n) rencontre le point x infiniment souvent après l'instant m }.

L'identité

$$P(E_m | X_m = x) = P(E_0 | X_0 = x)$$

bien qu'intuitive ne peut pas se déduire aisément de la formule (2.5). Elle est, par contre, une conséquence de la propriété de Markov générale que nous allons établir ici.

L'espace canonique

Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov sur M . Pour chaque entier n , X_n est une variable aléatoire à valeurs dans M et (X_0, \dots, X_n) une variable aléatoire à valeurs dans M^{n+1} . Il est donc naturel de voir X comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des trajectoires $\mathbb{T} = M^{\mathbb{N}}$. Pour ce faire il suffit de munir \mathbb{T} de la tribu produit dont nous rappelons ici la définition.

LA TRIBU PRODUIT DE $\mathbb{T} = M^{\mathbb{N}}$

Pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in M^{n+1}$ notons $C(y_0, \dots, y_n)$ le *cylindre* de longueur $n + 1$ constitué des éléments de \mathbb{T} dont les $n + 1$ premières coordonnées sont déterminées par (y_0, \dots, y_n) :

$$C(y_0, \dots, y_n) = \{\underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{T} : x_0 = y_0, \dots, x_n = y_n\}.$$

Soit $\mathcal{B}_n(\mathbb{T})$ la tribu (sur \mathbb{T}) engendrée par tous les cylindres de longueur $n + 1$. La *tribu produit* sur \mathbb{T} , notée $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, est la tribu engendrée par $\{\mathcal{B}_n(\mathbb{T}); n \geq 0\}$, c'est-à-dire

aussi la tribu engendrée par tous les cylindres. Il est maintenant clair que l'application $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ définie par $X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est une variable aléatoire. En effet, pour tout cylindre $C(y_0, \dots, y_n)$

$$X^{-1}(C(y_0, \dots, y_n)) = \bigcap_{i=0}^n X_i^{-1}(y_i) \in \mathcal{A}.$$

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ est engendrée par les cylindres, cela suffit à prouver la mesurabilité de X (par la proposition 8.1.10 de l'appendice).

Remarque 2.1.19 Même dans le cas particulier où M est fini, et où par conséquent la tribu sur M égale l'ensemble des parties de M , \mathbb{T} n'est pas dénombrable et $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ n'est pas l'ensemble des parties de \mathbb{T} . Supposons, par exemple, $M = \{0, 1\}$. Alors $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ s'identifie avec la tribu borélienne sur $[0, 1[$. Plus précisément, soit $\mathcal{N} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble dénombrable constitué des suites $(\omega_i)_{i \geq 1}$ telles que $\omega_i = 1$ à partir d'un certain rang. Tout $\omega \in [0, 1[$ s'écrit de façon unique

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(\omega)}{2^n}$$

où $\mathbf{B}(\omega) = (B_n(\omega))_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{N}$. L'application $\mathbf{B} : [0, 1[\rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{N}$, est une bijection bi-mesurable (\mathbf{B} et \mathbf{B}^{-1} sont mesurables) de $[0, 1[$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{N}$. Ainsi tout élément de $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ s'écrit $A = \tilde{A} \cup (A \setminus \tilde{A})$ où $\tilde{A} = (A \cap \mathcal{N}^c)$ s'identifie (par \mathbf{B}) à un borélien de $[0, 1[$ et $A \setminus \tilde{A}$ est dénombrable.

LOI D'UNE CHAÎNE DE MARKOV

Si X_0 est de loi μ , on note \mathbb{P}_μ la loi de X , et dans le cas particulier où $\mu = \delta_x$ (i.e. $X_0 = x$), on adopte la convention d'écriture $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$. L'espérance associée est notée \mathbb{E}_μ . Ainsi, pour toute fonction $\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ positive ou \mathbb{P}_μ intégrable, $\mathbb{E}_\mu(\Phi) = \int \Phi d\mathbb{P}_\mu$.

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ étant engendrée par les cylindres, \mathbb{P}_μ est caractérisée par son action sur les cylindres en ce sens que toute probabilité coïncidant avec \mathbb{P}_μ sur les cylindres est égale à \mathbb{P}_μ (voir par exemple le théorème d'unicité 8.1.22 de l'appendice). Par ailleurs, d'après la proposition 2.1.20,

$$\mathbb{P}_\mu(C(y_0, \dots, y_n)) = \mu(y_0)P(y_0, y_1)P(y_1, y_2) \dots P(y_{n-1}, y_n). \quad (2.6)$$

En résumé

Proposition 2.1.20 *La loi d'une chaîne de Markov sur M de noyau P et de loi initiale μ est la probabilité \mathbb{P}_μ sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ caractérisée par (2.6).*

C'est la probabilité dont la restriction à la tribu engendrée par les fonctions qui ne dépendent que de $n + 1$ coordonnées (n quelconque) $\mathcal{B}_n(\mathbb{T})$, est

$$\mathbb{P}_\mu^{(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \mu(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Propriété de Markov

Nous allons traduire sur l'espace canonique la propriété de Markov. L'idée est d'introduire le *processus décalé de n* $X_{n+} = (X_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$ défini par

$$X_{n+,k} = X_{n+k}, \quad k \geq 0.$$

La propriété de Markov exprime deux choses :

- (X_0, \dots, X_{n-1}) et X_{n+} sont "conditionnellement" indépendants si on connaît le présent X_n ;
- le phénomène est sans mémoire, c'est-à-dire que la loi du futur observé après l'instant n (c'est-à-dire la loi de X_{n+} quand on observe X_n) est la loi de la chaîne partant de X_n .

Justifions ces énoncés à l'aide du formalisme précédent et de la notion de loi image.

Théorème 2.1.21 (Propriété de Markov). *Soit X une chaîne de Markov sur M de loi initiale μ . Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbb{N}$.*

$$P(X_{k+} \in A | X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}_{x_k}(A).$$

Pour toute fonction mesurable bornée $\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Psi : M^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Psi(X_0, \dots, X_{k-1})\Phi(X_{k+})) = \mathbb{E}(\Psi(X_0, \dots, X_{k-1}))\mathbb{E}_{X_k}(\Phi) \\ &= \sum_{(x_0, \dots, x_k) \in M^{k+1}} \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{k-1}, x_k)\Psi(x_0, \dots, x_{k-1})\mathbb{E}_{x_k}(\Phi). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

Remarquons que la première assertion se déduit de la seconde en posant

$$\Psi(y_0, \dots, y_{k-1}) = \mathbf{1}_{x_0, \dots, x_{k-1}}(y_0, \dots, y_{k-1})$$

et $\Phi(\underline{y}) = \mathbf{1}_{x_k}(y_0)\mathbf{1}_A(\underline{y})$. Nous commençons par supposer que Φ ne dépend que de $n + 1$ coordonnées, auxquelles nous pouvons appliquer les résultats de la proposition (2.1.20). Les quantités à calculer sont

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}(\Psi(X_0, \dots, X_{k-1})\Phi(X_k, \dots, X_{k+n})) \\
 &= \sum_{M^{k+n+1}} \mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{k-1+n}, x_{k+n})\Psi(x_0, \dots, x_{k-1})\Phi(x_k, \dots, x_{k+n}) \\
 &= \sum_{M^{k+1}} \Psi(x_0, \dots, x_{k-1})\mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{k-2}, x_{k-1})P(x_{k-1}, x_k) \times \\
 & \quad \sum_{M^n} P(x_k, x_{k+1}) \dots P(x_{k-1+n}, x_{k+n})\Phi(x_k, \dots, x_{k+n}) \\
 &= \sum_{M^{k+1}} \Psi(x_0, \dots, x_{k-1})\mu(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{k-2}, x_{k-1})P(x_{k-1}, x_k)\mathbb{E}_{x_k}(\Phi) \\
 &= \mathbb{E}(\Psi(X_0, \dots, X_{k-1})\mathbb{E}_{X_k}(\Phi))
 \end{aligned}$$

Les deux membres de cette égalité sont des mesures par rapport à Φ . L'égalité sur les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées implique l'égalité des mesures testées sur toutes les fonctions boréliennes bornées.

2.2 Chaînes de Markov finies

Nous revenons dans cette section sur le cas particulier fondamental des chaînes de Markov finies. Nous supposons donc ici que M est un ensemble fini de cardinal d et P une **matrice** stochastique sur M . Nous notons $X = (X_n)$ une chaîne de Markov de noyau P . Nous notons aussi $X^\mu = (X_n^\mu)$ (respectivement $X^x = (X_n^x)$) la chaîne de Markov de noyau P et de loi initiale μ (respectivement δ_x). La loi de X^μ sur l'espace $M^{\mathbb{N}}$ des trajectoires est notée \mathbb{P}_μ (respectivement \mathbb{P}_x).

2.2.1 Existence des probabilités invariantes

Soit $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des probabilités sur M . L'espace M étant de cardinal $d < \infty$, $\mathcal{P}(M)$ n'est rien d'autre que le *simplexe* unité de \mathbb{R}^d :

$$\mathcal{P}(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^d : \mu(x) \geq 0, \sum_x \mu(x) = 1 \right\}.$$

C'est en particulier un ensemble compact et convexe.

Dans ce contexte, il existe toujours une probabilité invariante.

Théorème 2.2.1 *L'ensemble des probabilités invariantes pour P est un sous-ensemble non vide compact et convexe de $\mathcal{P}(M)$.*

DÉMONSTRATION :

Soit μ une probabilité sur M et $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k$. Remarquons que

$$\hat{\mu}_n P - \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} (\mu P^n - \mu).$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n P - \hat{\mu}_n = 0 \tag{2.7}$$

car μP^n et μ sont dans $\mathcal{P}(M)$ sous-ensemble borné de \mathbb{R}^d . Par compacité de $\mathcal{P}(M)$, on peut extraire de $\hat{\mu}_n$ une sous-suite $\hat{\mu}_{n_k}$ convergente. Soit π la limite de cette sous-suite. Alors d'après (2.7),

$$\pi P = \pi.$$

Cela prouve l'existence d'une probabilité invariante. La compacité et la convexité de l'ensemble des probabilités invariantes est immédiate. La preuve est laissée au lecteur.

2.2.2 Irréductibilité et théorème ergodique presque sûr

Grphe orienté associé à P et irréductibilité

Un graphe (orienté) sur un ensemble fini (ou dénombrable) M est un couple $G = (M, E)$ caractérisé par un ensemble d'arêtes $E \subset M \times M$. Les points de M sont appelés les *sommets* du graphes et les points $y \in M$ tels que $(x, y) \in E$ les *voisins* de x . Le graphe est dit *symétrique* ou *non orienté* si

$$(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E.$$

On associe à P la structure de graphe orienté $G = (M, E)$ définie par

$$E = \{(x, y) \in M \times M : P(x, y) > 0\}.$$

Exemple 2.2.2 (L'urne d'Ehrenfest, (iii)). Les graphes associés à l'urne d'Ehrenfest (exemple 2.1.6) sont symétriques. Pour $n = 3$ ils ont l'aspect suivant :

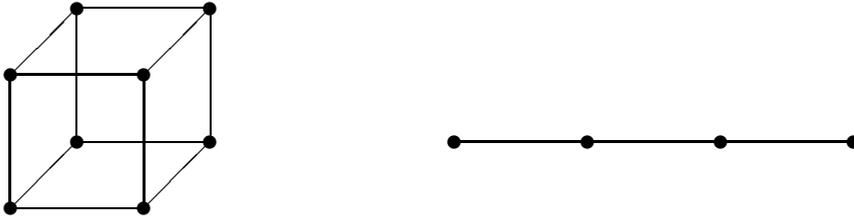


Figure 2.1 Graphes associés à l'urne d'Ehrenfest à 3 particules.
Descriptions microscopique (gauche) et macroscopique (droite).

Un exemple élémentaire montre qu'il peut exister plusieurs probabilités invariantes pour une chaîne finie dont le graphe associé n'est pas connexe. En effet, soit $M = \{1, 2\}$ et P la matrice stochastique sur M définie par

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est évident que si la chaîne associée part du point 1 (respectivement 2) elle n'en sort pas. Par conséquent δ_1 et δ_2 sont des probabilités invariantes. Plus généralement l'ensemble des probabilités invariantes de cette chaîne est le "segment"

$$\{t\delta_1 + (1-t)\delta_2 : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Afin d'assurer l'unicité de la probabilité invariante, il suffit de supposer la chaîne irréductible.

Définition 2.2.3 *Le noyau P (respectivement la chaîne X) est irréductible si pour tout couple $(x, y) \in M \times M$ il existe un entier $k = k(x, y)$ et une suite finie $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y$ telle que*

$$P(x_i, x_{i+1}) > 0$$

pour $i = 0, \dots, k-1$, c'est-à-dire

$$P(X_k = y | X_0 = x) = P^k(x, y) > 0.$$

Remarque 2.2.4 L'irréductibilité de P est équivalente à la connexité du graphe associé à P .

Proposition 2.2.5 *Si P est irréductible. Alors*

- (i) *les fonctions P -invariantes (i.e. $Pf = f$) sont les fonctions constantes;*
- (ii) *P admet une unique probabilité invariante π . De plus $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in M$.*

DÉMONSTRATION :

Soit π une probabilité invariante. Vérifions d'abord que π est strictement positive. Puisque π est une probabilité, il existe nécessairement $x \in M$ tel que $\pi(x) > 0$. Soit $y \in M$ et $k = k(x, y)$ tel que $P^k(x, y) > 0$. Par invariance, $\pi P^k = \pi$. D'où

$$\pi(y) = \sum_z \pi(z) P^k(z, y) \geq \pi(x) P^k(x, y) > 0.$$

Nous passons maintenant à la preuve de (i). Pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ introduisons la *forme de Dirichlet*

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{x, y} (f(y) - f(x))^2 \pi(x) P(x, y).$$

P étant irréductible et $\pi > 0$, toute fonction annulant la forme de Dirichlet (i.e. $\mathcal{E}(f) = 0$) est nécessairement constante. Il suffit donc de prouver que les fonctions P invariantes (i.e. $Pf = f$) annulent la forme de Dirichlet. Or

$$\mathcal{E}(f) = \mathbb{E}((f(X_1^\pi) - f(X_0^\pi))^2) = \mathbb{E}(f(X_1^\pi)^2) - 2\mathbb{E}(f(X_1^\pi)f(X_0^\pi)) + \mathbb{E}(f(X_0^\pi)^2).$$

Puisque π est invariante X_0^π et X_1^π ont même loi. D'où

$$\mathbb{E}(f(X_0^\pi)^2) = \mathbb{E}(f(X_1^\pi)^2).$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.1.9

$$\mathbb{E}(f(X_1^\pi)f(X_0^\pi)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_1^\pi)|X_0)f(X_0^\pi)) = \mathbb{E}(Pf(X_0^\pi)f(X_0^\pi)).$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}(f) = 2\mathbb{E}(f(X_0^\pi)[f - Pf](X_0^\pi)).$$

Ceci conclut la preuve de (i).

Pour prouver (ii), supposons qu'il existe une autre probabilité invariante ν . Soit Q la matrice stochastique définie par $Q(x, y) = P(y, x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$ et f la fonction définie par $f(x) = \frac{\nu(x)}{\pi(x)}$. Alors, Q est irréductible et $Qf = f$. D'après (i), f est constante et nécessairement $\pi = \nu$.

Exercice 2.2.6 (Classes de récurrence). Si P n'est pas irréductible, il est possible de décomposer le graphe associé en la réunion d'une partie "transiente" et de composantes connexes de sorte que sur chacune de ces composantes, la chaîne se comporte comme une chaîne irréductible.

Notons $x \rightsquigarrow y$ si il existe un chemin de x vers y , c'est-à-dire une suite $x_0 = x, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y$ telle que $P(x_i, x_{i+1}) > 0, i = 0, \dots, k-1$. Soit \sim la relation d'équivalence définie sur M par $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $(x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x)$. Sur l'ensemble quotient M/\sim des classes d'équivalences, on définit une relation d'ordre partiel $>$ par $A > B$ si et seulement si $x \rightsquigarrow y$ pour un (ou tout) x dans A et un (ou tout) y dans B . Une *classe de récurrence* est une classe minimale pour cet ordre partiel.

1) Soit $x \in M$. Montrer qu'avec probabilité 1, il existe une classe de récurrence C et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $X_n^x \in C$ pour tout $n \geq n_0$.

2) Soit C une classe de récurrence. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante π_C telle que $\pi_C(M \setminus C) = 0$.

3) En déduire que toute probabilité invariante est une combinaison convexe des probabilités π_C où C parcourt l'ensemble (fini) des classes de récurrence.

Théorème 2.2.7 (Théorème ergodique presque sûr). *Supposons P irréductible de probabilité invariante π . Alors*

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} = \pi(x)$$

presque sûrement,

(ii)

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)} > 0$$

pour tout $x \in M$, où

$$T_x = \inf\{k \geq 1 : X_k^x = x\}$$

désigne l'instant de premier retour en x .

Avant de démontrer ce théorème commençons par rappeler une version de la loi forte des grands nombres valable pour des variables positives.

Lemme 2.2.8 *Soient I_1, I_2, \dots des variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k = \mathbb{E}(I_1) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \text{ p.s.}$$

DÉMONSTRATION :

Rappelons que la loi forte des grands nombres pour des variables i.i.d. nécessite des

variables intégrables (voir par exemple le corollaire 4.3.8 du chapitre 4 de ce cours). Si $E(I_1) < \infty$, on applique la loi forte des grands nombres aux variables (I_i) . Si $E(I_1) = \infty$, on applique la loi forte des grands nombres aux variables bornées $\inf(I_i, M)$. Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I^i \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf(I^i, M) = E(\inf(I^1, M)).$$

Par convergence monotone, le dernier terme tend vers ∞ lorsque $M \rightarrow \infty$.

Nous passons maintenant à la preuve du théorème.

DÉMONSTRATION :

D'après la proposition 2.1.2 (ii), nous pouvons toujours supposer que (X_n) est solution d'une récurrence aléatoire

$$X_{n+1} = f_{\theta_{n+1}}(X_n),$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des variables i.i.d. à valeurs dans un espace Θ . Soient $T_x^0 < T_x^1 < \dots$ les instants successifs de retour en x définis par

$$T_x^0 = 0, T_x^{i+1} = \inf\{k > T_x^i : X_k^x = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Remarque : bien qu'il soit intuitivement clair que les variables T_x^i sont finies nous ne pouvons pas le supposer *a priori*.

Soient $(I_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. distribuées comme T_x^1 . Nous allons prouver que

(a) les variables $(T_x^1, T_x^2, \dots, T_x^n)$ et $(I_1, I_1 + I_2, \dots, I_1 + \dots + I_n)$ ont même loi ;

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n} = E(T_x^1).$$

(a) pour $1 \leq m \leq n \in \mathbb{N}^*$ définissons les événements

$$E(m, n) = \{\forall i = m, \dots, n-1 : f_{\theta_i} \circ \dots \circ f_{\theta_m}(x) \neq x\} \cap \{f_{\theta_n} \circ \dots \circ f_{\theta_m}(x) = x\}$$

et

$$E(m, \infty) = \{\forall i \geq m : f_{\theta_i} \circ \dots \circ f_{\theta_m}(x) \neq x\}.$$

Soient $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ avec $t_i \in \mathbb{N}$ pour $i \leq n-1$ et $t_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors

$$\{T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n\} = E(1, t_1) \cap E(t_1 + 1, t_2) \cap \dots \cap E(t_{n-1} + 1, t_n)$$

Les variables (θ_i) étant i.i.d., les événements qui apparaissent dans le second membre de cette dernière égalité sont indépendants, et

$$P(E(t_i + 1, t_{i+1})) = P(E(1, t_{i+1} - t_i)) = P(I_1 = t_{i+1} - t_i).$$

Ainsi

$$P(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n) = P(I_1 = t_1, \dots, I_1 + \dots + I_n = t_n).$$

(b) Ce dernier point est une application de la loi forte des grands nombres pour des variables i.i.d. positives (lemme 2.2.8).

Nous passons maintenant à la preuve des assertions (i) et (ii) du théorème. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe i tel que $T_x^i \leq n < T_x^{i+1}$. D'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} = \frac{i}{n} \in \left] \frac{i}{T_x^{i+1}}, \frac{i}{T_x^i} \right]$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^1)} \quad (2.8)$$

dans le cas particulier où $X_0 = x$, d'après (b) ci-dessus.

Si $X_0 \neq x$, X_n rencontre x après un temps T , dont nous allons prouver qu'il est fini p.s. Il suffit donc d'appliquer ce qui précède au processus $(X_{n+T})_{n \geq 0}$ pour en déduire que (2.8) est vraie.

Montrons maintenant que T est fini. Notons $T_{y,x} = \inf\{n \geq 0 : X_n^y = x\}$ (de sorte que $T = T_{X_0,x}$). Commençons par remarquer que $T_{y,x} < \infty$. En effet, comme la chaîne est finie et irréductible,

$$\alpha = \inf_{y \in M \setminus \{x\}} P(T_{y,x} < \infty) > 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(T_{y,x} = \infty) &= \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in (M \setminus \{x\})^n} P(T_{y,x} = \infty | X_0 = y, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) P(X_0 = y, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in (M \setminus \{x\})^n} P(T_{x_n,x} = \infty) P(X_0 = y, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

par la propriété de Markov (théorème 2.1.21). D'où

$$P(T_{y,x} = \infty) \leq (1 - \alpha) P(T_{y,x} \geq n),$$

et donc

$$P(T_{y,x} = \infty) \leq (1 - \alpha)^2$$

en passant à la limite $n \rightarrow \infty$. Cela donne $(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)^2$, d'où $\alpha = 1$.

Il nous reste maintenant à établir l'assertion (ii). Par convergence dominée, l'égalité (2.8) reste vraie en espérance. D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^1)}.$$

Dit autrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^1)}$$

en notant μ la loi de X_0 . Pour $\mu = \pi$, cela prouve (ii) car $\pi P^k = \pi$ par invariance.

Corollaire 2.2.9 *Si P est irréductible, (X_n) visite infiniment souvent tous les points de l'espace d'états.*

Exemple 2.2.10 (Battre les cartes, (ii)). Dans l'exemple de la section 1.2, les hypothèses du théorème 2.2.7 sont vérifiées. On retrouve donc ici la proposition 1.2.1.

Exemple 2.2.11 (L'urne d'Ehrenfest, (iv)). La chaîne associée à la description macroscopique de l'urne d'Ehrenfest (exemple 2.1.6) est irréductible sur l'espace d'états $M = \{0, \dots, N\}$. En particulier, d'après le corollaire 2.2.9, l'état N pour lequel toutes les particules se trouvent du même côté de la paroi sera atteint infiniment souvent ! Cela peut sembler paradoxal surtout si N est très grand (par exemple $N \sim 6,02 \cdot 10^{23}$) car on s'attend plutôt à observer des états où les particules sont également distribuées entre les deux enceintes. La "solution" de ce paradoxe nous est donnée (en partie) par le théorème 2.2.7. Supposons N pair. Le temps moyen de retour à l'état $N/2$ est

$$\frac{1}{\mu_N(N/2)} \sim \sqrt{\frac{\pi N}{2}}$$

d'après la formule de Stirling (2.12), alors que le temps moyen de retour à l'état N est

$$\frac{1}{\mu_N(N)} = 2^N.$$

Par ailleurs, l'approximation gaussienne de la loi binomiale montre que

$$\mu_N \left(\left[\frac{N - c\sqrt{N}}{2}, \frac{N + c\sqrt{N}}{2} \right] \right) \sim \mathbb{P}(|G| \leq c) = 1 - 2\mathbb{P}(G > c)$$

où G est une v.a. gaussienne de densité $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx$. Voici une estimation simple de cette dernière quantité. Pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}(G > c) = \mathbb{P}(e^{tG} > e^{tc}) \leq e^{-tc} \mathbb{E}(e^{tG}) = e^{-tc} e^{t^2/2}.$$

Pour $t = c$ cela donne

$$\mathbb{P}(G > c) \leq e^{-c^2/2}. \quad (2.9)$$

Pour c égal à quelques unités, la diffusion d'Ehrenfest, si elle part de $N/2$, n'a donc pratiquement aucune chance de sortir de l'intervalle $[\frac{N-c\sqrt{N}}{2}, \frac{N+c\sqrt{N}}{2}]$ dans un temps raisonnable.

2.2.3 Apériodicité et convergence en loi

Une conséquence de l'irréductibilité est la convergence *au sens de Césaro* de la suite des lois de (X_n) .

Proposition 2.2.12 *Supposons P irréductible de probabilité invariante π . Alors pour toute probabilité μ sur M ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k = \pi.$$

En d'autres termes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k^\mu = x) = \pi(x)$$

pour tout $x \in M$.

DÉMONSTRATION :

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à l'assertion (i) du théorème 2.2.7.

Remarquons par contre que l'irréductibilité n'est pas suffisante pour assurer la convergence en loi de (X_n) . En effet, soit $M = \{1, 2\}$ et P la matrice stochastique sur M définie par

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les suites (X_{2n}^1) et (X_{2n+1}^1) ont pour lois respectives δ_1 et δ_2 et la loi de (X_n^1) n'est pas convergente.

Pour démontrer la convergence en loi de (X_n) vers π il est nécessaire de supposer P *fortement irréductible*.

Définition 2.2.13 *Le noyau P (respectivement la chaîne X) est **fortement irréductible** si il existe un entier k tel que*

$$P^k(x, y) > 0$$

pour tout $(x, y) \in M \times M$.

Théorème 2.2.14 (Théorème ergodique). *Soit P un noyau sur M fortement irréductible de probabilité invariante π . Soit k l'entier de la définition 2.2.13 et*

$$\alpha = \alpha(P) = \sum_{y \in M} \left(\inf_{x \in M} P^k(x, y) \right) > 0.$$

Alors pour toute probabilité μ sur M et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{A \subset M} |\mathbb{P}(X_n^\mu \in A) - \pi(A)| \leq (1 - \alpha)^{[n/k]}$$

où $[a]$ désigne la partie entière de a . En particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^n = \pi.$$

Nous allons démontrer ce résultat en deux étapes. La première consiste à démontrer une version du théorème 2.2.14 dans le cas où (X_n) est la trajectoire d'un système dynamique aléatoire (vérifiant une certaine hypothèse). La deuxième étape consiste à se ramener à la première.

Proposition 2.2.15 *Soit P un noyau sur M induit par un système dynamique aléatoire (f, m) , c'est-à-dire*

$$P(x, y) = m(\theta \in \Theta : f_\theta(x) = y).$$

Soit

$$\text{Cst} = \{h : M \rightarrow M : \forall x, y \ h(x) = h(y)\}$$

l'ensemble des fonctions constantes sur M ; et soit

$$0 \leq \beta = \beta(f, m) = m(\theta \in \Theta : f_\theta \in \text{Cst}).$$

Alors

$$\sup_{A \subset M} |\mathbb{P}(X_n^\mu \in A) - \pi(A)| \leq (1 - \beta)^n.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^n = \pi$$

si $\beta(f, m) > 0$.

DÉMONSTRATION :

Soient (θ_i) des variables aléatoires i.i.d. de loi m , et X_0 une variable aléatoire de loi μ indépendante de la suite (θ_i) . Introduisons les applications aléatoires

$$D_n = f_{\theta_1} \circ \cdots \circ f_{\theta_n},$$

$$G_n = f_{\theta_n} \circ \cdots \circ f_{\theta_1},$$

et la variable $X_n = G_n(X_0)$. Nous allons prouver les 3 assertions suivantes :

- (a) il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans M et un temps $T_1 \in \mathbb{N}$ tel que
 $D_n(x) = Z$ pour tout $n \geq T_1$ et $x \in M$;
 (b) X_n converge en loi vers Z ,
 (c) Z a pour loi π , l'unique probabilité invariante de P .

(a) Soient

$$T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : D_n \in \text{Cst}\}$$

et

$$T_2 = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : f_{\theta_n} \in \text{Cst}\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2 > n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{f_{\theta_i} \notin \text{Cst}\}\right) \\ &= (1 - \mathbb{P}(f_{\theta_1} \in \text{Cst}))^n \leq (1 - \beta)^n. \end{aligned}$$

Une seconde de réflexion suffit pour se convaincre que pour toutes fonctions h, g de M dans M

$$h \in \text{Cst} \Rightarrow g \circ h \in \text{Cst}.$$

D'où

$$T_1 \leq T_2 < \infty$$

et $D_n = Z$ pour tout $n \geq T_1$ et $Z = D_{T_1}(1)$.

(b) D'après ce qui précède, pour tout ensemble $A \subset M$,

$$|\mathbf{1}_{\{D_n(X_0) \in A\}} - \mathbf{1}_{\{Z \in A\}}| \leq \mathbf{1}_{\{T_1 > n\}} \leq \mathbf{1}_{\{T_2 > n\}}.$$

En passant à l'espérance, on en déduit que

$$|\mathbb{P}(D_n(X_0) \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| \leq \mathbb{P}(T_2 > n) \leq (1 - \beta)^n.$$

Les variables (θ_i) étant i.i.d. les variables $D_n(X_0)$ et $X_n = G_n(X_0)$ ont même loi. Ceci conclut la preuve de (b).

(c) L'équation de Chapman-Kolmogorov (2.1.9) prouve que si la loi de X_n converge, alors la loi limite est une probabilité invariante. Cela conclut la preuve de cette proposition.

Lemme 2.2.16 *Sous les hypothèses, et avec les notations, du théorème 2.2.14, le noyau P^k est induit par un système dynamique aléatoire (f, m) tel que*

$$\alpha(P^k) \leq \beta(f, m).$$

DÉMONSTRATION :

Quitte à remplacer P^k par P nous supposons que $P(x, y) > 0$ pour tout couple $(x, y) \in M^2$. M étant de cardinal d , ordonnons les éléments de sorte que $M = \{1, \dots, d\}$. Soient $\alpha(j) = \inf_i P(i, j)$ et $\alpha(i, j) = P(i, j) - \alpha(j) \geq 0$. Pour tout $i \in M$, soit

$$0 = t_{i,0} < t_{i,1} \dots < t_{i,d} \leq t_{i,d+1} \leq \dots \leq t_{i,2d} = 1$$

la subdivision de $[0, 1]$ définie par

$$t_{i,j} - t_{i,j-1} = \alpha(j)$$

et

$$t_{i,d+j} - t_{i,d+j-1} = \alpha(i, j)$$

pour $j = 1, \dots, d$. Soit, maintenant, $f :]0, 1[\times M \rightarrow M$ l'application définie par

$$f(\theta, i) = j \text{ pour } \theta \in]t_{i,j-1}, t_{i,j}] \cup]t_{i,d+j-1}, t_{i,d+j}].$$

Alors P est le noyau induit par (f, λ) (où λ désigne la mesure uniforme sur $]0, 1[$). Par ailleurs

$$\alpha(P) \leq P(f_{\theta_1} \in \text{Cst}) = \beta(f, \lambda).$$

La proposition 2.2.15 et lemme 2.2.16 prouvent le théorème 2.2.14 dans le cas où $P(i, j) > 0$ pour tout $i, j \in M$. Dans le cas général où $P^k(i, j) > 0$ pour un entier k , on applique ce qui précède au noyau P^k . Pour tout n et pour tout entier $r \in \{0, \dots, k-1\}$,

$$|\mu P^{kn+r}(A) - \pi(A)| = |(\mu P^r)(P^k)^n(A) - \pi(A)| \leq (1 - \alpha)^n.$$

Ceci prouve le théorème dans le cas général.

Remarque 2.2.17 La preuve donnée ci-dessus est inspirée d'un algorithme récemment proposé par Propp et Wilson [54]. Cet algorithme, remarquable, permet de simuler *en un temps fini* une variable aléatoire dont la loi est *exactement* la probabilité invariante π d'une chaîne de Markov finie. L'algorithme consiste à calculer les produits à droite D_n jusqu'à l'instant T_1 où D_n devient constante. La variable $D_{T_1}(x)$ (pour tout x) a exactement π pour loi. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur cet algorithme.

Remarque 2.2.18 Le théorème 2.2.14 montre que la vitesse de convergence vers la loi stationnaire est exponentielle. Cependant le coefficient $(1 - \alpha)^{1/k}$ du théorème 2.2.14 ne donne, en général, qu'une estimation très grossière de cette vitesse. Il offre par contre l'avantage d'être (assez) facile à calculer. L'exemple qui suit (extrait de Saloff-Coste [28]) est instructif à ce sujet.

Exemple 2.2.19 Soit $M = \{0, \dots, d - 1\}$ et P le noyau défini par $P(x, y) = \frac{1}{2}$ si $x = y = 0$, ou $x = y = d - 1$ ou $|x - y| = 1$. Ce noyau est fortement irréductible et réversible par rapport à la loi uniforme $\pi(x) = \frac{1}{d}$.
Notons, pour $c > 0$,

$$R_c = \inf\{k \in \mathbb{N} : \sup_{x, y} |P^k(x, y) - \pi(y)| \leq e^{-c}\}.$$

Le plus petit entier k tel que P^k soit strictement positif est d et, avec les notations du théorème 2.2.14,

$$\alpha = \frac{1}{2^d}.$$

Le théorème 2.2.14 donne alors

$$\left[\frac{R_c}{d} \right] \leq -\frac{c}{\ln(1 - \frac{1}{2^d})} \leq 2^d c,$$

c'est-à-dire

$$R_c \leq d2^d c + 1. \quad (2.10)$$

Voyons maintenant comment calculer le "bon" ordre de grandeur de R_c . La matrice P étant symétrique, elle est donc, par un théorème classique d'algèbre linéaire, diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. La vérification des deux points suivants est laissée au lecteur (voir Feller [19]) :

– les valeurs propres de P sont

$$\lambda_i = \cos\left(\frac{\pi i}{d}\right), \quad i = 0, \dots, d - 1;$$

– les fonctions $\Psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{d}}$, et

$$\Psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\pi i \frac{(x + 1/2)}{d}\right) \quad i = 1, \dots, d - 1$$

forment une base orthonormée de vecteurs propres.

Pour $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ notons $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in M} f(x)g(x)$. Alors, pour toute fonction $f :$

$M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} \langle f, \Psi_i \rangle \Psi_i$$

et

$$Pf = \sum_{i=0}^{d-1} \langle f, \Psi_i \rangle P\Psi_i = \sum_{i=0}^{d-1} \langle f, \Psi_i \rangle \lambda_i \Psi_i.$$

De même

$$P^n f = \sum_{i=0}^{d-1} \langle f, \Psi_i \rangle \lambda_i^n \Psi_i.$$

Appliquons cette dernière formule à la fonction $\mathbf{1}_y$ définie par : $\mathbf{1}_y(x) = 1$ pour $y = x$ et 0 sinon. Alors $\langle \mathbf{1}_y, \Psi_i \rangle = \Psi_i(y)$ et

$$P^n \mathbf{1}_y = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i^n \Psi_i(y) \Psi_i.$$

D'où

$$P^n(x, y) = P^n \mathbf{1}_y(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i^n \Psi_i(x) \Psi_i(y),$$

et

$$\left| P^n(x, y) - \frac{1}{d} \right| = \left| \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i^n \Psi_i(x) \Psi_i(y) \right|.$$

Afin d'évaluer cette dernière quantité nous utilisons l'inégalité

$$\cos(\pi t) \leq 1 - 2t^2 \leq e^{-2t^2}$$

valable pour tout $0 \leq t \leq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| P^n(x, y) - \frac{1}{d} \right| &\leq \sum_{i=1}^{d-1} \exp\left(-2n \left(\frac{i}{d}\right)^2\right) |\Psi_i(x) \Psi_i(y)| \\ &\leq \frac{2}{d} \sum_{i=1}^{d-1} \exp\left(-2n \left(\frac{i}{d}\right)^2\right) = \frac{2}{d} \left(\exp\left(-\frac{2n}{d^2}\right) + A \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=2}^{d-1} \exp\left(-2n \left(\frac{i}{d}\right)^2\right) \leq \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{2n}{d^2} s^2\right) ds \\ &= d\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \int_{\frac{2\sqrt{n}}{d}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leq d\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \exp\left(-\frac{2n}{d^2}\right) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité se prouve en utilisant l'estimation (2.9). En résumé

$$\left| P^n(x, y) - \frac{1}{d} \right| \leq \frac{2}{d} \exp\left(-\frac{2n}{d^2}\right) \left(1 + d\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right).$$

D'où (en supposant $d \geq 2$ et $c \geq 3$)

$$R_c \leq \frac{d^2(c+1)}{2}. \quad (2.11)$$

Pour $d = 20$ et $c = 10$, l'estimation (2.10) donne $R_c \leq 209715201$ contre $R_c \leq 2200$ pour (2.11).

Apériodicité

Nous allons montrer ici comment “lire” l'irréductibilité forte d'une matrice stochastique sur le graphe associé.

Définition 2.2.20 Soit $x \in M$ et $R(x) = \{n \in \mathbb{N}^* : P^n(x, x) > 0\}$. La **période** $\rho(x)$ de x est le plus grand commun diviseur de $R(x)$.

Proposition 2.2.21 Supposons P irréductible. Alors tous les points ont même période.

DÉMONSTRATION :

Soient $x, y \in M$. Le noyau P étant irréductible, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que $P^{n_1}(x, y) > 0$ et $P^{n_2}(y, x) > 0$. D'où

$$P^{n_1+n_2}(x, x) = \sum_{z \in M} P^{n_1}(x, z)P^{n_2}(z, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0.$$

De même, pour tout $r \in R(y)$

$$P^{n_1+r+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^r(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0.$$

Ceci prouve que $n_1 + n_2 \in R(x)$ et $n_1 + n_2 + r \in R(x)$. Donc $\rho(x)$ divise $n_1 + n_2$ et $n_1 + n_2 + r$, et par différence $\rho(x)$ divise r . D'où $\rho(x) \leq \rho(y)$ et, par symétrie, $\rho(y) \leq \rho(x)$.

La proposition précédente nous autorise donc à parler de “la période” d'un noyau P irréductible. Si cette période est 1 le noyau est dit *apériodique*.

Corollaire 2.2.22 *Supposons P irréductible. Si il existe $x \in M$ tel que $P(x, x) > 0$ alors P est apériodique.*

La proposition suivante est très utile pour vérifier l'irréductibilité forte d'un noyau.

Proposition 2.2.23 *Le noyau P est fortement irréductible si et seulement si il est irréductible et apériodique.*

DÉMONSTRATION :

Supposons P fortement irréductible. Choisissons $(x, y) \in M^2$ tel que $P(x, y) > 0$.

Alors

$$P^{k+1}(x, x) \geq P(x, y)P^k(y, x) > 0$$

et

$$P^k(x, x) > 0$$

où k est l'entier de la définition 2.2.13. D'où $k, k+1 \in R(x)$ et donc $\mathfrak{p}(x) = 1$.

Réciproquement, supposons P irréductible et apériodique. Pour tout couple $(x, y) \in M^2$ avec $x \neq y$ fixons un entier $n(x, y)$ tel que $P^{n(x, y)} > 0$. Nous allons montrer que

- (a) pour tout $x \in M$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $P^n(x, x) > 0$ pour $n \geq n(x)$;
- (b) soit $k = \sup\{n(x) + n(x, y) : (x, y) \in M^2\}$. Alors $P^k(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in M^2$.

(a) Soient $n_1, \dots, n_k \in R(x)$ des entiers dont le PGCD est 1. D'après le théorème de Bezout il existe k entiers relatifs q_1, \dots, q_k tels que

$$\sum_i q_i n_i = 1.$$

Soient $a(x) = \sum_{q_i > 0} q_i n_i$ et $b(x) = -\sum_{q_i < 0} q_i n_i$. Alors,

$$P^{a(x)}(x, x) \geq \prod_{q_i > 0} [P^{n_i}(x, x)]^{q_i} > 0.$$

De même $P^{b(x)} > 0$. Les entiers $b(x)$ et $a(x) = b(x) + 1$ sont donc éléments de $R(x)$. Pour tout $n \geq b(x)$, la division euclidienne de n par $b(x)$ s'écrit $n = qb(x) + r = (q-r)b(x) + ra(x)$ avec $r \leq b(x) - 1$. Posons maintenant $n(x) = b(x)^2 - 1$. Si $n \geq n(x)$ alors nécessairement $q \geq r$ et donc $n \in R(x)$.

(b) Posons $k = n(x) + q + n(x, y)$ avec $q \geq 0$ Alors, d'après (a),

$$P^k(x, y) \geq P^{n(x)+q}(x, x)P^{n(x, y)}(x, y) > 0.$$

Exemple 2.2.24 (L'urne d'Ehrenfest, (v)). Le noyau associé à la description macroscopique de l'urne d'Ehrenfest (exemple 2.1.6) est irréductible de période 2. Il est d'ailleurs clair que le théorème ergodique 2.2.7 ne s'applique pas ; car pour z pair, X_{2n}^z est pair et X_{2n+1}^z impair pour tout n . En particulier pour tout $y \in M$ impair,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{2n}^z = y) = 0 \neq \mu_N(y).$$

Considérons maintenant, toujours pour z pair, la chaîne (Y_n^z) définie sur

$$\tilde{M} = \{x \in M \text{ et } x \text{ pair}\}$$

par $Y_n^z = X_{2n}^z$. Cette nouvelle chaîne est irréductible et apériodique et sa probabilité invariante est donnée par

$$\tilde{\mu}_N(x) = \frac{\mu_N(x)}{\mu_N(\tilde{M})}.$$

En effet, la matrice stochastique de (Y_n^z) est P^2 et par invariance de μ_N

$$\sum_{x \text{ pair}} \mu_N(x) P^2(x, y) + \sum_{x \text{ impair}} \mu_N(x) P^2(x, y) = \mu_N(y).$$

Pour y et x impairs $P^2(x, y) = 0$. D'où

$$\sum_{x \in \tilde{M}} \mu_N(x) P^2(x, y) = \mu_N(y)$$

pour tout $y \in \tilde{M}$.

2.2.4 Croissance de l'entropie

Le résultat essentiel de la section précédente est le théorème ergodique (théorème 2.2.14) dont nous avons donné une preuve "moderne" directement inspirée par un algorithme de simulation (l'algorithme de Propp-Wilson). Dans cette section, nous allons retrouver ce résultat comme conséquence d'un des grands principes de la physique statistique : *la croissance de l'entropie*. Cette section ne contient pas de résultat fondamentalement nouveau et sa lecture n'est pas essentielle à la compréhension du chapitre.

Entropie

Soit π une probabilité de référence sur M chargeant tous les points (i.e. $\pi(x) > 0$) et μ une probabilité sur M . L'entropie relative ou information de Kullback de μ par rapport à π est la quantité

$$H(\mu, \pi) = \sum_{x \in M} s\left(\frac{\mu(x)}{\pi(x)}\right) \pi(x)$$

où

$$s(t) = t \ln(t).$$

Dans le cas où π est la loi uniforme, on retrouve (au signe et à une constante additive près) l'entropie définie en physique statistique (Voir Georges et Mezard [7]). Plus généralement, $H(\mu, \pi)$ est une mesure de l'écart entre la loi μ et la loi de référence π .

Proposition 2.2.25 *La fonction $\mu \in \mathcal{P}(M) \rightarrow H(\mu, \pi)$ est convexe, positive ou nulle. Elle ne s'annule que pour $\mu = \pi$.*

DÉMONSTRATION :

La convexité se déduit immédiatement de la convexité de s . Les autres propriétés sont une conséquence de la proposition 2.2.26 ci-dessous appliquée au noyau $P(x, y) = \pi(y)$.

La proposition suivante montre que l'entropie de Kullback de la loi de X_n par rapport à π décroît au cours du temps. Dans le cas particulier où π est la loi uniforme cela revient à dire que l'entropie (de la physique statistique) est croissante.

Proposition 2.2.26 *Soit P un noyau irréductible de probabilité invariante π . Pour toute probabilité μ sur M*

$$H(\mu P, \pi) \leq H(\mu, \pi).$$

Si de plus il existe y tel que $P(x, y) > 0$ pour tout x , alors l'égalité n'a lieu que pour $\pi = \mu$.

DÉMONSTRATION :

Soit $f(x) = \frac{\mu(x)}{\pi(x)}$ et Q la matrice stochastique

$$Q(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x).$$

Alors $Qf(x) = \frac{\mu P(x)}{\pi(x)}$ et

$$H(\mu P, \pi) = \sum_x \pi(x) s(Qf(x)).$$

Par convexité de s ,

$$s(Qf(x)) \leq Q(s \circ f)(x).$$

D'où

$$\sum \pi(x)s(Qf(x)) \leq \sum \pi(x)Q(s \circ f)(x) = \sum \pi(x)s(f(x)),$$

où la dernière égalité provient du fait que π est Q -invariante. Ceci prouve l'inégalité de la proposition.

Supposons $H(\mu P, \pi) = H(\mu, \pi)$. Alors la fonction $s(Qf) - Q(s \circ f)$ est négative d'intégrale nulle par rapport à π . Elle est donc identiquement nulle.

Soit y tel que $P(x, y) > 0$ pour tout x , alors $Q(y, x) > 0$ pour tout x et, par stricte convexité de s , l'égalité

$$s\left(\sum_x q(y, x)f(x)\right) = \sum_x Q(y, x)s(f(x))$$

n'est possible que si $f = 1$.

Remarque 2.2.27 La proposition 2.2.26 permet de retrouver le théorème ergodique 2.2.14. Supposons P fortement ergodique. Quitte à remplacer P par P^k , on peut toujours supposer $P > 0$. Soit μ_n la loi de X_n . La fonction $n \rightarrow H(\mu_n, \pi)$ est décroissante positive, donc convergente. Notons

$$H^* = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mu_n, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mu_n P, \pi).$$

Soit μ^* une valeur d'adhérence de (μ_n) . Alors, par continuité de H ,

$$H^* = H(\mu^*, \pi) = H(\mu^* P, \pi)$$

et donc $\mu^* = \pi$, d'après la proposition 2.2.26.

2.3 Chaînes de Markov dénombrables

Dans cette section consacrée aux chaînes sur les espaces dénombrables, nous allons rencontrer deux phénomènes qui n'existent pas avec les chaînes finies : la *réurrence nulle* et la *transience*. Le comportement asymptotique d'une chaîne (irréductible) sur un espace d'états dénombrable infini est différent selon que la chaîne admet ou non une probabilité invariante. Dans le premier cas, la chaîne se comporte essentiellement comme une chaîne finie (on retrouve des théorèmes ergodiques du type de ceux des sections 2.2.2 et 2.2.3 du chapitre 2.2). Dans le second cas la chaîne est soit

(a) *transiente* : les points de l'espace d'état ne sont visités qu'un nombre fini de fois ;

(b) soit récurrente nulle : les points sont visités infiniment souvent, mais le temps moyen entre deux visites successives est infini !

Nous conservons les notations de la section 2.2.

Marches aléatoires sur les graphes

Les marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d introduites dans la section 1.2 sont des exemples typiques de chaînes de Markov dénombrables. Le marcheur décrit un graphe dont les sommets E sont les points de \mathbb{Z}^d et les arêtes générées par les vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_d, -e_1, -e_2, \dots, -e_d\}$, où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{Z}^d . Chaque sommet possède donc $2d$ voisins qui, dans le modèle de la promenade, sont équiprobables.

Soit $G = (M, E)$ un graphe sur M au sens de 2.2.2 dont les sommets sont les points de M et les arêtes les points de E . Le graphe est *localement fini* si pour tout $x \in M$, le nombre $N(x)$ de voisins de x est fini. Le graphe est *régulier de degré r* si $N(x) = r$ pour tout x .

Définition 2.3.1 Soit $G = (M, E)$ un graphe localement fini. La marche aléatoire simple sur (M, E) est la chaîne de Markov (X_n) sur M de matrice de transition

$$P(x, y) = \frac{1}{N(x)}, \quad \text{si } (x, y) \in E, \quad P(x, y) = 0, \quad \text{sinon.}$$

Nous avons déjà rencontré dans la section 1.3 des marches aléatoires sur le réseau \mathbb{Z}^d . Voici quelques autres exemples de graphes infinis.

Exemple 2.3.2 (Arbres homogènes). Soit $G = (M, E)$ un graphe symétrique. Nous notons \sim la relation symétrique

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in E.$$

Une *boucle* est une arête du type (x, x) . Un *cycle* est une suite $x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n \sim x_0$ avec $n \geq 2$, et $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

Un *arbre symétrique* est un graphe symétrique sans boucle ni cycles. L'*arbre homogène de degré r* , noté \mathbb{A}_r , est l'arbre symétrique de degré r . C'est ainsi que l'arbre

\mathbb{A}_2 est isomorphe à \mathbb{Z} (voir figure 1.1).

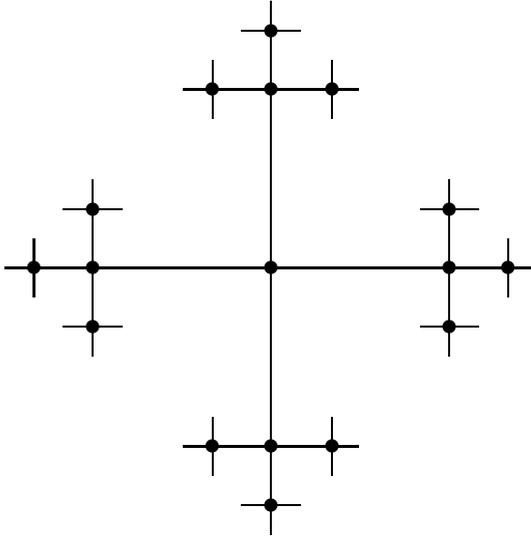


Figure 2.2 L'arbre homogène \mathbb{A}_4 .

Exemple 2.3.3 (Graphes de Cayley). La marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d (ainsi d'ailleurs que celle sur l'arbre homogène \mathbb{A}_r) est un exemple particulier de marche aléatoire sur un groupe finiment engendré. On dit qu'un groupe G est *finiment engendré* si il existe un ensemble fini $S \subset G$ tel que tout élément de G peut s'écrire comme un produit fini d'éléments de S . Un tel groupe est dénombrable ou fini. Soit G un groupe finiment engendré et $S = \{s_1, \dots, s_k, s_1^{-1}, \dots, s_k^{-1}\}$ un ensemble générateur et symétrique ($S = S^{-1}$). Le *graphe de Cayley* à droite (respectivement à gauche) associé à S est le graphe (G, E) où

$$E = \{(g, gs) : g \in G, s \in S\}$$

(respectivement $E = \{(g, sg) : g \in G, s \in S\}$). La marche aléatoire simple sur (G, E) est donnée par la récurrence aléatoire

$$X_{n+1} = X_n \theta_{n+1}$$

(respectivement $X_{n+1} = \theta_{n+1} X_n$) où la suite $\{\theta_i\}$ est i.i.d. de loi uniforme dans S . Sa matrice de transition est

$$P(x, y) = \frac{1}{|S|} \mathbf{1}_{\{x^{-1}y \in S\}}$$

(respectivement $P(x, y) = \frac{1}{|S|} \mathbf{1}_{\{yx^{-1} \in S\}}$)

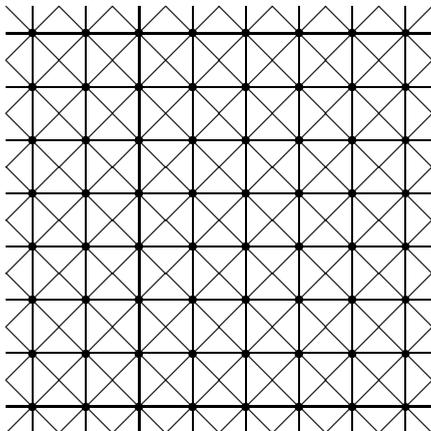


Figure 2.3 *Le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 avec les générateurs*

$$e_1, e_2, (e_1 + e_2), (e_1 - e_2), -e_1, -e_2, -(e_1 + e_2), (e_2 - e_1).$$

L'étude des marches aléatoires sur les graphes infinis et les groupes est un sujet fascinant. Un livre récent sur le sujet est Woess [33].

2.3.1 Récurrence et transience

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un ensemble dénombrable M de noyau de transition P . Comme dans le cas fini, nous étudions la récurrence en introduisant les temps de passage de la chaîne aux différents points.

Pour $x \in M$, la suite $\{T_x^n\}_{n \geq 1}$ des *instants successifs de retour en x* est définie par récurrence

$$T_x^1 = T_x = \inf\{k > 0 : X_k^x = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

En particulier $T_x = \infty \iff \forall k \geq 1, X_k^x \neq x$,

$$T_x^{n+1} = \inf\{k > T_x^n : X_k^x = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

pour $n \geq 1$, avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. En particulier, dès qu'un temps est infini, tous les temps postérieurs le sont.

Définition 2.3.4 Soit (X_n^x) une chaîne de Markov d'espace d'états dénombrable. L'état $x \in M$ est dit

(a) **transient** pour P si $P(T_x < \infty) < 1$;

(b) **récurrent** pour P si $P(T_x < \infty) = 1$.

Les états récurrents peuvent être de deux types :

- les états **récurrents nuls** si $E(T_x) = \infty$;
- les états **récurrents positifs** si $E(T_x) < \infty$.

Les temps de passage sont reliés au nombre de visites N de la chaîne dans un état par la formule

$$N_x^n = \sum_{k \geq 0}^n \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} \geq p + 1 \iff T_x^p \leq n,$$

$$N_x = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} \geq p + 1 \iff T_x^p < \infty.$$

Les instants T_x^n sont les temps de sauts du processus croissant $n \mapsto N_x^n$ qui part de 1 à l'instant 0.

Comme dans le cas fini, nous avons un théorème de renouvellement qui relie le comportement asymptotique de la fréquence empirique de passage en un état à la valeur moyenne du temps de retour à cet état. La preuve est la même que celle du théorème 2.2.7. La différence essentielle vient de ce que les variables considérées ici peuvent prendre la valeur infinie. La vérification en est laissée au lecteur.

Proposition 2.3.5 (Renouvellement). Soit $x \in M$ et $(I_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $[1, \infty]$, distribuées comme T_x . Alors

(i) Les vecteurs $(T_x, T_x^2, \dots, T_x^n)$ et $(I_1, I_1 + I_2, \dots, I_1 + \dots + I_n)$ ont même loi.

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{N_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} = \frac{1}{E(T_x)}.$$

Remarque 2.3.6 Dans le cas où x est récurrent, l'assertion (i) de la proposition précédente signifie que les variables $T_x, T_x^2 - T_x^1, \dots, T_x^{n+1} - T_x^n$ sont i.i.d. Dans le cas transient cela n'a plus de sens car la variable $(T_x^{n+1} - T_x^n)$ n'est pas définie si $T_x^n = \infty$.

Une première conséquence de la proposition 2.3.5 est la dychotomie suivante.

Corollaire 2.3.7 (i) *Si x est récurrent, la suite (X_n^x) revient presque sûrement une infinité de fois à son état initial x , soit $P(N_x = \infty) = 1$.*

(ii) *Si x est transient, le nombre aléatoire de visites à x est presque sûrement fini et suit une loi géométrique sur \mathbb{N} :*

$$P(N_x = k) = (1 - a)a^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad \text{si } a = P(T_x < \infty).$$

DÉMONSTRATION :

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.5.

Si x est récurrent, les variables $(T_x^n)_{n \geq 1}$ sont finies presque sûrement et (X_n^x) visite x infiniment souvent.

Si x est transient, pour $k \geq 1$,

$$P(N_x = k) = P(I_1 < \infty, \dots, I_{k-1} < \infty, I_k = \infty) = a^{k-1}(1 - a).$$

Critère analytique de récurrence

Une manière simple (mais non équivalente) de montrer que le nombre de visites à un état est infini est de montrer que l'espérance du nombre des visites est infinie.

Plus généralement, il est intéressant d'introduire la transformée de Laplace des différents temps de retour, ou les t -potentiels des temps de séjour en un état.

Pour $0 \leq t \leq 1$, définissons

$$U(x, t) = E(t^{T_x} \mathbf{1}_{\{T_x < \infty\}}) = \sum_{k \geq 1} P(T_x = k) t^k,$$

$$G(x, t) = E \left(\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} t^k \right) = \sum_{k \geq 0} P^k(x, x) t^k.$$

Remarquons que

$$U(x, 1) = P(T_x < \infty) \quad \text{et} \quad G(x, 1) = E(N_x).$$

Théorème 2.3.8 *Pour tout $x \in M$ et $0 \leq t \leq 1$,*

$$G(x, t) = \frac{1}{1 - U(x, t)}.$$

En particulier l'état x est récurrent si et seulement si

$$G(x, 1) = \sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = \infty.$$

DÉMONSTRATION :

Clairement les valeurs de k pour lesquelles la chaîne est dans l'état x sont énumérées par les temps T_x^n :

$$\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k^x = x\}} t^k = 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_x^n < \infty\}} t^{T_x^n}.$$

D'après (et avec les notations de) la proposition 2.3.5,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_x^n < \infty\}} t^{T_x^n}) = \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n t^{I_i} \mathbf{1}_{\{I_i < \infty\}} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(t^{I_i} \mathbf{1}_{\{I_i < \infty\}}) = U(x, t)^n.$$

D'où

$$G(x, t) = 1 + \sum_{n \geq 1} U(x, t)^n = \frac{1}{1 - U(x, t)}.$$

La dépendance par rapport au point de départ peut être étudiée exactement de la même façon à l'aide des temps

$$T_{x,y} = \inf\{k > 0 : X_k^x = y\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

et des fonctions définies pour $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= \mathbb{E}(t^{T_{x,y}} \mathbf{1}_{T_{x,y} < \infty}) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(T_{x,y} = k) t^k \\ G(x, y, t) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k^x = y\}} t^k \right) = \sum_{k \geq 0} P^k(x, y) t^k. \end{aligned}$$

Exercice 2.3.9 Soient x, y, z des points de M , $T_{x,y}$ et $T_{x,y,z}$ les instants définis par

$$T_{x,y} = \inf\{k > 0 : X_k^x = y\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

et

$$T_{x,y,z} = \inf\{k > T_{x,y} : X_k^x = z\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Soient I, J des variables indépendantes respectivement distribuées comme $T_{x,y}$ et $T_{y,z}$. Montrer que $(T_{x,y}, T_{x,y,z})$ et $(I, I + J)$ ont même loi.

Dans le cas d'un noyau irréductible les notions de récurrence et de transience sont indépendantes du point choisi.

Proposition 2.3.10 *Supposons P irréductible. Alors*

- (i) *tous les états ont même nature (récurrents positifs ou bien récurrents nuls ou bien transients);*
- (ii) *dans le cas récurrent, tous les points de M sont visités infiniment souvent : pour $x, y \in M$*

$$P(X_n^x = y \text{ pour une infinité de } n) = 1 ;$$

- (iii) *dans le cas transient, les sous-ensembles finis de M ne sont visités (qu'au plus) un nombre fini de fois : pour $A \subset M$ de cardinal fini*

$$P(X_n \in A \text{ pour une infinité de } n) = 0.$$

DÉMONSTRATION :

Fixons $(x, y) \in M \times M$. Par hypothèse d'irréductibilité, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que $P^{n_1}(x, y) > 0$ et $P^{n_2}(y, x) > 0$.

(i) Posons $\epsilon = P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x)$. Alors

$$P^{n+n_1+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^n(y, y)P^{n_2}(y, x) \geq \epsilon P^n(y, y)$$

et, de même, $P^{n+n_1+n_2}(y, y) \geq \epsilon P^n(x, x)$. La condition $\sum_n P^n(x, x) < \infty$ (et par conséquent le caractère récurrent ou transient de x) ne dépend donc pas du point x .

Nous admettons ici que le caractère récurrent *positif (ou nul)* est indépendant du point x . Nous déduirons cette propriété du théorème 2.3.22.

(ii) Supposons les points de M récurrents. D'après la proposition 2.3.5, (X_n^x) visite x infiniment souvent. Soit $\alpha = P(\exists n < T_x : X_n^x = y)$ la probabilité de rencontrer y avant de retourner en x . Alors $\alpha > 0$ car il existe un chemin de x vers y . Donc

$$0 < P^{n_1}(x, y) \leq P(\exists n \geq 0 X_n^x = y) \leq \sum_{k \geq 1} P(\exists n \in]T_x^{k-1}, T_x^k[: X_n^x = y)$$

et le terme général de la série est α . Enfin la probabilité de ne pas visiter y entre 0 et T_x^k est $(1 - \alpha)^k$ qui tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$.

(iii) Cette dernière assertion est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.7.

Exemple 2.3.11 Une chaîne de Markov finie irréductible est récurrente positive. C'est une conséquence du théorème 2.2.7.

Exemple 2.3.12 (Pannes aléatoires, (ii)). Nous revenons ici sur l'exemple 2.1.7 des pannes aléatoires. La suite des variables (A_t) est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} de matrice

$$P(a, a+1) = \frac{P(X > a+1)}{P(X > a)} = 1 - P(a, 0)$$

pour $a \geq 1$, $P(0, 1) = 1$ et $P(a, b) = 0$ sinon, où X est une v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* .

Soit $T = T_0$ l'instant de premier retour en 0. Alors, pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(A_1 = 1, \dots, A_{k-1} = k-1, A_k = 0) \\ &= \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} \cdots \frac{P(X > k-1)}{P(X > k-2)} \frac{P(X = k)}{P(X > k-1)} = \frac{P(X = k)}{P(X > 1)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$P(T = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(T > k) = \frac{P(X = \infty)}{P(X > 1)} = 0.$$

Ceci prouve que 0 est un état récurrent. De même,

$$E(T) = \sum_{k \geq 2} kP(T = k) = 1 + \frac{E(X) - 1}{P(X > 1)}$$

L'état 0 est donc récurrent positif si et seulement si $E(X) < \infty$. Cette chaîne étant irréductible, elle est donc récurrente positive si $E(X) < \infty$ et récurrente nulle sinon.

2.3.2 Marches aléatoires

Le cas de la dimension 1

Exemple 2.3.13 (Marches aléatoires sur \mathbb{Z}). Soit (X_n) la marche aléatoire sur \mathbb{Z} définie par

$$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$$

où $\{\theta_i\}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi

$$P(\theta_i = +1) = p, P(\theta_i = -1) = q$$

pour $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

La propriété d'invariance par translation de la promenade montre que les fonctions $U(x, t)$, $U(x, x + y, t)$ qui mesurent les transformées de Laplace des temps d'atteinte des points ne dépendent pas du point de départ x . Il en est de même des fonctions

$G(x, x + y, t)$. Posons $G(x, t) = G(t)$, $U(x, t) = U(t)$ et $U(x, x + y, t) = U_y(t)$. En tenant compte de ce qui se passe à la première étape, nous voyons que

$$\begin{aligned} U(t) &= t(pU(1, 0, t) + qU(-1, 0, t)) = t(pU_{-1}(t) + qU_1(t)), \\ U_1(t) &= t(p + qU_2(t)), \text{ et } U_{-1}(t) = t(q + pU_{-2}(t)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour aller de 0 à 2 il est nécessaire de passer par 1. D'où

$$U_2(t) = U_1(t)U(1, 2, t) = U_1(t)^2 \text{ et } U_{-2}(t) = U_{-1}(t)^2.$$

La variable $y = tqU_1(t)$ (respectivement $y = tpU_{-1}(t)$) est donc solution de l'équation

$$y = t^2 pq + y^2.$$

Cette équation admet deux solutions, mais comme $y = 0$ pour $t = 0$, la bonne solution est nécessairement

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2}.$$

On trouve alors

$$U(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq} \text{ et } G(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4t^2 pq}}.$$

En particulier,

(i) le nombre moyen de visites de (X_n^x) à x est

$$\mathbb{E}(N_x) = G(1) = \frac{1}{|1 - 2p|};$$

La suite (X_n) est donc récurrente pour $p = 1/2$ et transiente pour $p \neq 1/2$;

(ii)

$$\mathbb{E}(T_x | T_x < \infty) = \frac{U'(1)}{U(1)} = \left(1 - \frac{1}{2 \max(p, q)}\right)^{-1}.$$

La suite (X_n) est récurrente nulle pour $p = 1/2$.

Exemple 2.3.14 (Marches aléatoires réfléchies sur \mathbb{N}). On suppose maintenant que la marche ne franchit pas la barrière 0, où elle est réfléchiée. La matrice de transition de la chaîne de Markov sur \mathbb{N} (X_n) est donnée, si $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $0 \leq a < 1$, par

$$\begin{aligned} P(x, x + 1) &= p \text{ et } P(x, x - 1) = q \quad \forall x \geq 1 \\ P(0, 0) &= a \text{ et } P(0, 1) = 1 - a. \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, en regardant ce qui se passe à la première étape, nous avons

$$U(0, t) = ta + t(1 - a)U(1, 0, t).$$

Par ailleurs, la fonction $t \rightarrow U(1, 0, t)$ est la même que celle de la marche sur \mathbb{Z} étudiée dans l'exemple précédent (car la chaîne réfléchie sur \mathbb{N} ne sait pas qu'elle est réfléchie avant d'avoir touché l'origine). Ainsi,

$$U(0, t) = ta + \frac{(1 - a)}{2p}(1 - \sqrt{1 - 4t^2pq}).$$

(i) Si $p \leq 1/2$, $P(T_0 < \infty) = U(0, 1) = 1$.

(ii) Si $p > 1/2$, $P(T_0 < \infty) = U(0, 1) = a + \frac{(1-a)(1-p)}{p}$.

La chaîne est donc récurrente pour $p \leq 1/2$ et transiente pour $p > 1/2$.

(iii) La chaîne est récurrente nulle pour $p = 1/2$ et récurrente positive pour $p < 1/2$, car

$$\mathbb{E}(T_0 \mathbf{1}_{\{T_0 < \infty\}}) = U'_t(0, 1) = a + \frac{1 - a}{2p} \left(1 + \frac{4p(1 - p)}{|1 - 2p|} \right).$$

Exemple 2.3.15 (Marches sur l'arbre homogène). Soit (X_n) la marche aléatoire simple sur l'arbre homogène \mathbb{A}_r (voir l'exemple 2.3.2). Pour $x \in \mathbb{A}_r$, notons

$$D_n = d(X_n^x, x)$$

où $d(x, y)$ désigne la distance de x à y (i.e. le nombre minimum d'arêtes permettant de relier x à y). La suite (D_n) est une marche aléatoire réfléchie sur \mathbb{N} de transitions

$$P(k, k + 1) = \frac{r - 1}{r}, \quad P(k, k - 1) = \frac{1}{r}$$

pour $k \geq 1$, et

$$P(0, 1) = 1.$$

La suite (D_n) (et par conséquent (X_n)) est donc transiente pour $r > 2$ d'après l'exemple précédent.

Exercice 2.3.16 Pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{A}_r , montrer que

$$U(x, t) = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4(r - 1)t^2}}{2(r - 1)}.$$

En déduire $P(T_x < \infty)$ et $\mathbb{E}(T_x | T_x < \infty)$.

Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d

Rappelons que la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est la suite (X_n) définie par la récurrence

$$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des variables i.i.d. de loi uniforme dans $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$.

Nous allons démontrer ici le théorème de Polya (théorème 1.3.1) dont nous rappelons d'abord l'énoncé.

Théorème 2.3.17 (Polya, 1921). *Pour $d = 1$ ou 2 , la marche aléatoire (X_n) est récurrente. Pour $d \geq 3$, elle est transiente.*

DÉMONSTRATION :

La preuve du théorème 2.3.17 repose sur le critère de récurrence du théorème 2.3.8.

Preuve pour $d \leq 2$.

1) $d = 1$. Pour n impair $P(X_n = 0) = 0$. Pour $n = 2k$,

$$P(X_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^k.$$

En utilisant la formule de Stirling,

$$\ln(n!) = n(\ln(n) - 1) + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.12)$$

on trouve

$$P(X_{2k} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Cela prouve la divergence de la série $\sum_n P(X_n = 0)$ et, donc, la récurrence de (X_n) .

2) $d = 2$. Notons $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ et $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$. Les variables $U_k = \theta_k^1 + \theta_k^2$ et $V_k = \theta_k^1 - \theta_k^2$ sont des variables indépendantes et de même loi

$$P(U_k = 1) = P(U_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, en utilisant ce qui précède,

$$\begin{aligned} P(X_{2k} = 0) &= P(X_{2k}^1 = X_{2k}^2 = 0) = P(X_{2k}^1 + X_{2k}^2 = X_{2k}^1 - X_{2k}^2 = 0) \\ &= P(U_1 + \dots + U_{2k} = 0) P(V_1 + \dots + V_{2k} = 0) \sim \frac{1}{\pi k}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve encore la récurrence.

Preuve pour $d \geq 3$.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction caractéristique des variables θ_i . Pour $t = (t_1, \dots, t_d)$,

$$\Phi(t) = E(\exp(i\langle t, \theta_1 \rangle)) = \frac{1}{d}(\cos(t_1) + \dots + \cos(t_d)).$$

Lemme 2.3.18

$$\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X_{2k} = 0_{\mathbb{Z}^d}) = \frac{1}{2\pi^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{dt}{1 - \Phi^2(t)}.$$

DÉMONSTRATION :

Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, notons

$$I_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \exp(i\langle x, t \rangle) dt.$$

Il est facile de vérifier (théorème de Fubini) que $I_d(x) = \prod_{j=1}^d I_1(x_j)$. D'où l'on déduit que $I_d(x) = 1$ pour $x = (0, \dots, 0)$ et $I_d(x) = 0$ sinon.

Soit $\Phi_{X_n} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction caractéristique de X_n ,

$$\Phi_{X_n}(t) = \mathbf{E}(\exp(i\langle X_n, t \rangle)).$$

D'où (Fubini encore)

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \Phi_{X_n}(t) dt = \mathbf{E}(I_d(X_n)) = \mathbf{P}(X_n = (0, \dots, 0)).$$

Par ailleurs, par indépendance des θ_i ,

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{j=1}^n \Phi_{\theta_j}(t) = \Phi(t)^n.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X_{2k} = (0, \dots, 0)) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k \geq 0} \int_{[-\pi, \pi]^d} \Phi^{2k}(t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{k \geq 0} \Phi^{2k}(t) dt = \frac{1}{2\pi^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{dt}{1 - \Phi^2(t)}, \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité se déduit du théorème de Fubini (encore et toujours!) pour des fonctions positives.

Lemme 2.3.19 *L'intégrale $\int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{dt}{1 - \Phi^2(t)}$ est finie pour $d \geq 3$.*

DÉMONSTRATION :

Les points du domaine d'intégration où la fonction $1 - \Phi^2(t)$ s'annule sont l'origine et les deux points (π, \dots, π) et $(-\pi, \dots, -\pi)$. Il suffit donc de montrer qu'en chacun de ces points la fonction $\Psi(t) = \frac{1}{1 - \Phi^2(t)}$ est équivalente à une fonction d'intégrale finie.

En $0_{\mathbb{R}^d}$, $\Phi(t) \sim \frac{d}{\|t\|^2}$. Pour voir que la fonction $\frac{1}{\|t\|^2}$ est d'intégrale finie sur un voisinage de l'origine, on utilise des coordonnées sphériques. Posons $t = r\alpha$ où $r \geq 0$ et $\alpha \in S^{d-1}$, la sphère unité de \mathbb{R}^d . Alors

$$\int_{B(0, \epsilon)} \frac{1}{\|t\|^2} dt = \int_0^\epsilon \int_{S^{d-1}} \frac{1}{r^2} C_d r^{d-1} dr d\alpha = C_d \int_0^\epsilon r^{d-3} dr$$

où C_d est une constante. Pour $d \geq 3$, cette intégrale est finie. On procède de même pour les points (π, \dots, π) et $(-\pi, \dots, -\pi)$.

La transience de la chaîne pour $d \geq 3$ se déduit alors de ces deux derniers lemmes et du théorème 2.3.8. En effet, on a alors que

$$\sum_k \mathbb{P}(X_k = 0_{\mathbb{Z}^d}) = \sum_k \mathbb{P}(X_{2k} = 0_{\mathbb{Z}^d}) < \infty.$$

Exercice 2.3.20 On suppose ici que les variables $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans l'ensemble

$$S = \{\epsilon_i e_i + \epsilon_j e_j, : 1 \leq i < j \leq d, \epsilon_i = -1 \text{ ou } 1\}.$$

Montrer que (X_n) est récurrente pour $d \leq 2$ et transiente sinon. Comparer le résultat obtenu avec le théorème de Polya (théorème 1.3.1).²

2.3.3 Théorèmes ergodiques

Après l'étude détaillée de ces exemples, nous revenons à l'étude des théorèmes limites. La preuve de la proposition suivante est identique à celle de la proposition 2.2.5

Proposition 2.3.21 *Supposons P irréductible. Alors P admet au plus une probabilité invariante. Si π est une telle probabilité, $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in M$.*

S'agissant de l'existence, nous avons déjà remarqué (voir exemple 2.1.13) que la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} n'admet pas de probabilité invariante. Plus généralement, l'existence d'une probabilité invariante est équivalente à la récurrence positive de la chaîne comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 2.3.22 *Soit P un noyau irréductible. Alors*

(i) **(Théorème ergodique p.s.)**. *Presque sûrement,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbb{T}_x)}.$$

²En fait (voir Woess [33]), ce résultat ne dépend pas du choix de S dès lors que S est un ensemble fini symétrique qui engendre \mathbb{Z}^d .

(ii) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) il existe une (unique) probabilité invariante ;
- (b) $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)}$ est la probabilité invariante ;
- (c) tous les états sont récurrents positifs ;
- (d) il existe un état récurrent positif.

DÉMONSTRATION :

(i). Si P est transient, $\mathbb{E}(T_x) = \infty$ et x n'est visité qu'un nombre fini de fois (proposition 2.3.10 (iii)). Cela prouve (i) dans ce cas.

Si P est récurrent, l'instant $T = \inf\{k \geq 0 : X_k = x\}$ est fini presque sûrement (proposition 2.3.10 (ii)) et donc, pour $n > T$,

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-T} \mathbf{1}_{\{X_{T+k}=x\}}.$$

Les suites $(X_{T+k})_{k \geq 0}$ et $(X_k^x)_{k \geq 0}$ ayant même loi, l'assertion (i) se déduit alors de la proposition 2.3.5.

(ii). (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d).

Soit π une probabilité invariante et X_0 de loi π . Alors X_n est de loi π et $\mathbb{E}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=x\}}) = \pi(x)$. D'après (i) et par convergence dominée, $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)}$. Comme $\pi(x) > 0$ (proposition 2.3.21), les points sont tous récurrents positifs.

(iii) (d) \Rightarrow (a). Soit x un point récurrent positif et y un point quelconque de M . Les variables

$$\sum_{T_x^j+1}^{T_x^{j+1}} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}, j \geq 0,$$

sont positives et i.i.d. La loi des grands nombres implique donc que lorsque $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{k} \sum_1^{T_x^k} \mathbf{1}_{\{X_s=y\}} \rightarrow \mathbb{E} \left(\sum_1^{T_x} \mathbf{1}_{\{X_s^x=y\}} \right).$$

Mais d'autre part

$$\frac{1}{k} \sum_1^{T_x^k} \mathbf{1}_{\{X_s=y\}} = \frac{T_x^k}{k} \frac{1}{T_x^k} \sum_1^{T_x^k} \mathbf{1}_{\{X_s=y\}} \rightarrow \frac{\mathbb{E}(T_x)}{\mathbb{E}(T_y)}.$$

Il s'en suit donc que

$$\mathbb{E} \left(\sum_1^{T_x} \mathbf{1}_{\{X_s^x=y\}} \right) = \frac{\mathbb{E}(T_x)}{\mathbb{E}(T_y)}.$$

Or

$$\sum_y \mathbb{E} \left(\sum_1^{T_x} \mathbf{1}_{\{X_s^x=y\}} \right) = \mathbb{E}(T_x)$$

et par conséquent,

$$\sum_y \frac{1}{\mathbb{E}(T_y)} = 1.$$

Cela prouve que $\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_y)}$ est une probabilité. Il reste à prouver que π est invariante. Par application du théorème de convergence dominée à (i), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_1^k P^k(y, x) = \pi(x).$$

Alors

$$\sum_x \pi(x) P(x, z) = \sum_x [\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_1^k P^j(y, x)] P(x, z) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_1^k P^{j+1}(y, z),$$

et comme

$$\left| \sum_1^k P^{j+1}(y, z) - \sum_1^k P^j(y, z) \right| = |P^{j+1}(y, z) - P^j(y, z)| \leq 2,$$

le dernier membre vaut encore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_1^k P^j(y, z) = \pi(z).$$

Mais les inégalités

$$\sum_x \pi(x) P(x, z) \leq \pi(z)$$

que nous avons obtenues ne peuvent être que des égalités car les sommes des deux membres sont égales et finies.

Exemple 2.3.23 (Chaîne de vie et de mort). Ces chaînes de Markov jouent un grand rôle dans de nombreuses applications en biologie et ailleurs. Soit (X_n) la chaîne à valeurs dans \mathbb{N} de noyau Q défini par

$$Q(x, x-1) = q_x, \quad Q(x, x+1) = p_x, \quad Q(x, x) = r_x,$$

où $p_x + q_x + r_x = 1$, $p_x > 0$, $q_0 = 0$, et $q_x > 0$ pour tout $x \geq 1$.

Notons, pour $x \geq 1$,

$$\lambda_x = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{x-1}}{q_1 q_2 \cdots q_x}.$$

Proposition 2.3.24 *La chaîne (X_n) est récurrente positive si et seulement si*

$$\sum_{x \geq 1} \lambda_x < \infty.$$

Dans ce cas, la probabilité invariante est donnée par

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{x \geq 1} \lambda_x \right)^{-1} \quad \text{et } \pi(x) = \pi(0)\lambda_x$$

pour $x \geq 1$.

DÉMONSTRATION :

La preuve est une conséquence de l'équivalence entre les assertions (ii)(a) et (ii)(c) du théorème 2.3.22. L'équation des probabilités invariantes s'écrit

$$\pi(0)p_0 = q_1\pi(1)$$

et

$$\pi(x)(p_x + q_x) = q_{x+1}\pi(x+1) + p_{x-1}\pi(x-1)$$

pour $x \geq 1$. D'où, par récurrence sur x ,

$$\pi(x) = \lambda_x\pi(0).$$

L'existence d'une probabilité invariante se réduit donc à la condition énoncée dans la proposition.

Remarque 2.3.25 Nous montrerons dans le chapitre 6 (exemple 6.3.12) que la transience de la chaîne est équivalente à la condition

$$\sum_{x \geq 1} \frac{1}{\lambda_x p_x} < \infty.$$

En combinant cette condition avec la proposition précédente, nous en déduisons que la chaîne est récurrente nulle si et seulement si

$$\sum \lambda_x = \sum \frac{1}{p_x \lambda_x} = \infty.$$

Exemple 2.3.26 (Chaîne produit). Soient (X_n) et (Y_n) deux chaînes indépendantes ayant la même matrice de transition P ; et soit $Z_n = (X_n, Y_n)$ la chaîne produit. La matrice de (Z_n) est la matrice $P \otimes P$ définie par

$$(P \otimes P)((x, \tilde{x}), (y, \tilde{y})) = P(x, \tilde{x})P(y, \tilde{y}).$$

Proposition 2.3.27 Si P est irréductible et apériodique, alors il en est de même de $P \otimes P$. Si de plus P est récurrent positif, alors $P \otimes P$ est récurrent positif.

DÉMONSTRATION :

Comme P est irréductible et apériodique, il existe pour tout x un entier $n(x)$ tel que $P^n(x, x) > 0$ pour $n \geq n(x)$. Pour prouver ce point il suffit de reprendre la preuve du point (a) de la proposition 2.2.23. Pour tout couple (x, y) il existe, par irréductibilité, un entier $m = m(x, y)$ tel que $P^m(x, y) > 0$. Ainsi $P^n(x, y) \geq P^m(x, y)P^{n-m}(y, y) > 0$ pour $n > m(x, y) + n(y)$. D'où

$$(P \otimes P)^n((x, \tilde{x}), (y, \tilde{y})) \geq P^n(x, y)P^n(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$$

pour n assez grand. Ceci prouve que $P \otimes P$ est irréductible et apériodique.

La probabilité produit $\pi \otimes \pi$ est évidemment invariante pour $P \otimes P$. La récurrence positive de $P \otimes P$ s'en déduit par application du théorème 2.3.22 (ii).

Exercice 2.3.28 Montrer qu'il existe un P irréductible (et périodique) tel que $P \otimes P$ ne soit pas irréductible; et un P irréductible apériodique et récurrent tel que $P \otimes P$ se soit pas récurrent.

Le résultat suivant généralise le théorème ergodique 2.2.14 au cas d'un espace dénombrable.

Théorème 2.3.29 (Théorème ergodique). *Si P est irréductible apériodique et récurrent positif, alors pour tout $x \in M$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) = \pi(x)$$

où π désigne l'unique probabilité invariante de P .

DÉMONSTRATION :

Avec les notations de l'exemple 2.3.26, notons T le premier instant où $X_n = Y_n$ (T est le temps d'entrée dans la diagonale de $M \times M$ pour la chaîne produit (Z_n)). Pour tout $x \in M$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X_n = x) &= P(X_n = x, T > n) + P(X_n = x, T \leq n) \\ &= P(X_n = x, T > n) + P(Y_n = x, T \leq n) \\ &\leq P(T > n) + P(Y_n = x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$P(X_n = x) - P(Y_n = x) \leq P(T > n)$$

et, par symétrie,

$$|\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(Y_n = x)| \leq \mathbb{P}(T > n).$$

Supposons maintenant (Y_0) de loi π . Par invariance, Y_n est de loi π et donc

$$|\mathbb{P}(X_n = x) - \pi(x)| \leq \mathbb{P}(T > n).$$

Comme (Z_n) est récurrente positive (proposition 2.3.27) T est fini presque sûrement et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > n) = 0.$$

Remarque 2.3.30 Si P est irréductible et apériodique mais non nécessairement récurrent positif on peut aussi démontrer le résultat suivant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x)}.$$

On pourra consulter P.S. Toulouse [30] ou Revuz [25] pour une preuve.

◇

... Pour en savoir plus ...

2.4 Noyaux et chaînes sur un espace quelconque

Dans cette section nous définissons les chaînes de Markov sur un espace non nécessairement dénombrable. Le principal résultat présenté ici est le théorème 2.4.3 qui généralise la proposition 2.1.2 (ii) et montre qu'une chaîne de Markov peut toujours être pensée comme un système dynamique aléatoire. Les nombreuses questions relatives aux comportements asymptotiques des chaînes générales ne sont pas abordées. On pourra consulter à ce sujet le second tome de Dachuna-Castelle et Dufflo [15] pour une introduction ou Meyn et Tweedy [22] pour plus de détails.

Nous supposons ici que M est un sous-espace de \mathbb{R}^m ou plus généralement un borélien d'un espace métrique complet et séparable (il existe une suite dénombrable et dense). Un tel espace s'appelle un espace polonais. L'espace M sera toujours muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(M)$.

2.4.1 Noyaux de transition

Définition 2.4.1 *Un noyau de transition sur M est une famille $P = \{P_x\}_{x \in M}$ de probabilités sur M telle que pour tout borélien $G \in \mathcal{B}(M)$, l'application $x \in M \rightarrow P_x(G) \in [0, 1]$ est mesurable.*

– Si M est fini ou dénombrable, les questions de mesurabilité ne se posent pas, et la donnée d'un noyau de transition P est équivalente à la donnée d'une matrice de transition (encore notée P). Il suffit de poser $P_x(\{y\}) = P(x, y)$.

– Si λ est une mesure positive sur M et $r(x, y)$ une fonction borélienne sur $M \times M$ positive telle que $\int_M r(x, y)\lambda(dy) < \infty$, alors la famille de probabilités définie par

$$P_x(dy) = \frac{r(x, y)\lambda(dy)}{\int_M r(x, y)\lambda(dy)}, \text{ si } \int_M r(x, y)\lambda(dy) \neq 0, \quad \delta_x(dy) \text{ sinon}$$

est un noyau de transition.

– Le noyau de transition P transforme une fonction mesurable bornée $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ en une fonction mesurable bornée $Ph : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Ph(x) = \int_M h(y)P_x(dy) \tag{2.13}$$

et une mesure positive μ sur M en une mesure positive μP définie par

$$\mu P(G) = \int_M P_x(G)\mu(dx). \tag{2.14}$$

pour tout $G \in \mathcal{B}(M)$.

Proposition 2.4.2 *Soit (f, m) un système dynamique aléatoire sur M . Alors*

(i) *la famille $P = \{P_x\}_{x \in M}$ définie par*

$$P_x(G) = m(\theta \in \Theta : f_\theta(x) \in G)$$

*est un noyau de transition appelé le **noyau induit** par (f, m) ;*

(ii) *pour tout $x \in M$, P_x est la loi image de m par l'application $\theta \in \Theta \mapsto f(\theta, x) \in M$;*

(iii) *pour toute fonction h mesurable bornée,*

$$Ph(x) = \int_\Theta h(f(\theta, x))m(d\theta) ;$$

(iv) *pour toute mesure positive μ sur M et toute fonction h mesurable et bornée,*

$$\mu(Ph) = (\mu P)h = \int_M \int_\Theta h(f(\theta, x))m(d\theta)\mu(dx)$$

où μP est défini par (2.14) et νh (ν mesure, h fonction) est une notation (usuelle) pour $\int h d\nu$.

DÉMONSTRATION :

Soit $\Xi : \Theta \times M \rightarrow \{0, 1\}$ l'application définie par

$$\Xi(\theta, x) = \mathbf{1}_{\{f(\theta, x) \in G\}}.$$

L'application Ξ étant mesurable, le théorème de Fubini (voir Bony [1, Chapitre 2.4] ou l'appendice, théorème 8.2.12) nous dit que l'application

$$x \mapsto \int_\Theta \Xi(\theta, x)m(d\theta) = m(\theta \in \Theta : f(\theta, x) \in G)$$

est aussi mesurable. Le résultat sur les fonctions est une conséquence classique de l'intégration par rapport à une mesure image (voir l'appendice), et celui sur les mesures traduit seulement la définition.

Le théorème suivant généralise la proposition 2.1.2 (ii) et montre que tout noyau peut être vu comme le noyau induit par un système dynamique aléatoire.

Théorème 2.4.3 *Pour tout noyau de transition P sur M , il existe une application mesurable $f :]0, 1[\times M \rightarrow M$ telle que P soit le noyau induit par (f, λ) où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$.*

Avant, et afin, de démontrer cette proposition, rappelons comment simuler une variable aléatoire réelle à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ (on pourra consulter Comets [3, Chapitre I.5] à ce propos).

Lemme 2.4.4 (Simulation d'une variable réelle). *Soit Y une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ i.e. $F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. Soit $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ "l'inverse" de F définie par³*

$$F^{-1}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq u\}.$$

Alors, pour toute variable aléatoire U de loi uniforme sur $]0, 1[$, Y et $F^{-1}(U)$ ont même loi. Si de plus F est continue, $F(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

DÉMONSTRATION :

Il suffit de remarquer que $F^{-1}(u) \leq t \Leftrightarrow u \leq F(t)$. D'où

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$

Si de plus, F est continue, $F \circ F^{-1} = Id$ et $F(Y)$ a même loi que U .

Preuve du théorème 2.4.3 :

Supposons, dans un premier temps, que M est un borélien de \mathbb{R} . Soit F_x la fonction de répartition de P_x (i.e. $F_x(t) = P_x(]-\infty, t] \cap M)$), F_x^{-1} l'inverse de F_x (voir lemme 2.4.4) et $f :]0, 1[\times M \rightarrow M$, l'application définie par⁴ $f(\theta, x) = f_\theta(x) = F_x^{-1}(\theta)$. D'après le lemme 2.4.4

$$\lambda(\theta \in]0, 1[: f_\theta(x) \in G) = P_x(G)$$

pour tout borélien $G \subset M$. Ceci prouve la proposition dans ce cas particulier. Dans le cas général où M est borélien d'un espace polonais, on utilise le résultat suivant : M est *mesurablement isométrique à un borélien de \mathbb{R}* ; c'est-à-dire qu'il existe une application mesurable injective $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{M} = \Psi(M)$ est un borélien et $\Psi^{-1} : \tilde{M} \rightarrow M$ est mesurable. Admettons pour l'instant ce résultat et voyons comment il permet de conclure. Soit \tilde{P} le noyau sur \tilde{M} défini par $\tilde{P}_y(G) = P_{\Psi^{-1}(y)}(\Psi^{-1}(G))$. D'après ce qui précède, \tilde{P} est le noyau induit par un système dynamique aléatoire (\tilde{f}, λ) . Il suffit alors de poser $f_\theta = \Psi^{-1} \circ \tilde{f}_\theta \circ \Psi$ pour tout $\theta \in]0, 1[$. On vérifie alors facilement que P est le noyau induit par (f, λ) .

Il reste à montrer que M est mesurablement isométrique à un borélien. Pour ce faire nous allons prouver que :

³On fait la convention habituelle que l'inf de l'ensemble vide est $+\infty$.

⁴Remarquons que f est mesurable car

$$\{(\theta, x) : f_\theta(x) \leq t\} = \{(\theta, x) : P_x(]-\infty, t] \cap M) - \theta \geq 0\}.$$

- (a) M est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit ;
 (b) il existe une injection $\gamma : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1[$ bimesurable (γ et γ^{-1} sont mesurables).

L'espace M étant polonais, il existe une famille $\{p_n\}$ dénombrable et dense d'éléments de M . Soient $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1[$ et $H : M \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ les applications définies par

$$\Phi(t) = \frac{t}{1+t}$$

et

$$H_n(p) = \Phi(d(p, p_n))$$

où d est la distance sur M . Il n'est pas difficile de vérifier que H est un homéomorphisme de M sur $H(M)$, ce qui prouve (a).

Pour chaque $\omega \in [0, 1[$, introduisons la décomposition dyadique de ω

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} B_n(\omega),$$

où la suite $B(\omega) = (B_n(\omega))_{n \geq 1}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et est restreinte à satisfaire $\text{card}\{n : B_n(\omega) = 0\} = \infty$. L'application B est une injection bimesurable de $[0, 1[$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui transforme la mesure de Lebesgue en une probabilité produit et qui rend les coordonnées $B_n(\omega)$ indépendantes et de même loi de Bernoulli.

Soient maintenant $\mathbf{B} : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ l'application définie, pour $\underline{\omega} = (\omega_n)$, par

$$\mathbf{B}_{m,n}(\underline{\omega}) = B_m(\omega_n),$$

α une bijection de \mathbb{N} sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\tilde{\alpha} : \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ la bijection induite définie, pour $\underline{b} = (b_{n,m})$, par

$$\tilde{\alpha}(\underline{b})_n = b_{\alpha(n)}.$$

L'application $\gamma = B^{-1} \circ \tilde{\alpha} \circ \mathbf{B}$ est une injection bimesurable de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ sur $[0, 1[$ qui transforme la mesure produit $\lambda^{\mathbb{N}}$ en λ . Ceci prouve (b). Enfin, (a) et (b) montrent que M est mesurablement isométrique à $\gamma \circ H(M) \subset [0, 1[$.

Exercice 2.4.5 (Construction d'une suite de variables indépendantes). Soit $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de répartitions. Montrer qu'il existe une application

$$\begin{aligned} \Psi : [0, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \\ u &\rightarrow \Psi(u) = (\Psi_n(u))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

telle que si $U \in [0, 1[$ est une variable aléatoire de loi uniforme, les variables $\{\Psi_n(U), n \in \mathbb{N}\}$ sont indépendantes et $\Psi_k(U)$ est distribuée selon F_k . On pourra s'inspirer de la preuve du théorème 2.4.3.

2.4.2 Chaînes de Markov sur un espace quelconque

Le noyau induit par un système dynamique permet de calculer facilement la loi du vecteur (X_0, X_1, \dots, X_n) si on connaît loi initiale μ (i.e. la loi de X_0).

Proposition 2.4.6 Soit $X = (X_n)$ la trajectoire d'un système dynamique aléatoire (f, m) , de loi initiale μ . Alors pour tous boréliens A_0, \dots, A_n de M ,

$$P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \mu(dx_0) P_{x_0}(dx_1) P_{x_1}(dx_2) \dots P_{x_{n-1}}(dx_n). \quad (2.15)$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de vérifier (2.15) par récurrence sur n . Pour $n = 0$, c'est évident car $P(X_0 \in A_0) = \mu(A_0)$. Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} P(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1) &= P(X_0 \in A_0, f_{\theta_1}(X_0) \in A_1) \\ &= \int_{A_0} \mu(dx_0) \int_{\Theta} \mathbf{1}_{\{f(\theta, x_0) \in A_1\}} m(d\theta) = \int_{A_0} \mu(dx_0) P_{x_0}(A_1), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En vertu de la proposition 2.4.6, les propriétés en loi des suites récurrentes aléatoires ne dépendent que du noyau de transition induit et non des particularités de la dynamique (*i.e.* la fonction $f(\theta, x)$). Cela conduit à rechercher une définition intrinsèque des processus (vérifiant la propriété de Markov) basée sur le noyau de transition. C'est la notion de chaîne de Markov, dont nous donnons une définition précise ci-dessous.

Définition 2.4.7 Une chaîne de Markov d'espace d'états M , de noyau de transition P et de loi initiale μ , est une suite de v.a. (X_n) définie sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) , vérifiant les propriétés de la proposition (2.4.6) : pour tous boréliens A_0, \dots, A_n de M ,

$$P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \mu(dx_0) P_{x_0}(dx_1) P_{x_1}(dx_2) \dots P_{x_{n-1}}(dx_n).$$

Les systèmes dynamiques aléatoires sont évidemment des chaînes de Markov pour le noyau de transition induit, comme nous l'avons montré dans la proposition 2.4.6. Le théorème 2.4.3 prouve la réciproque, à savoir que toute chaîne de Markov est *simulable par* (à même distribution temporelle qu') un système dynamique de même noyau de transition.

◇

Chapitre 3

Simulation par chaînes de Markov

Les méthodes de simulation par chaîne de Markov se sont considérablement développées ces dernières années et sont utilisées dans des situations aussi variées que l'optimisation combinatoire, le traitement d'image ou encore l'expérimentation numérique en physique statistique.

Si M est un ensemble fini (en pratique très grand) et π une loi sur M que l'on cherche à simuler ; l'idée de ces méthodes consiste à exprimer π comme la mesure invariante d'une chaîne de Markov ergodique sur M .

Ce chapitre doit beaucoup au livre récent de Bernard Ycart [34] ainsi qu'à celui de Marie Duflo [18]. La lecture de ces livres est très abordable. Le lecteur y trouvera d'importants développements théoriques et de nombreuses références bibliographiques sur ce sujet.

3.1 Méthode de Monte-Carlo

Soit M un espace d'états fini et π la mesure invariante d'un noyau P irréductible et apériodique sur M . Supposons que l'on cherche à calculer la valeur moyenne d'une

fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sous π ,

$$E_{\pi}(f) = \sum_{x \in M} f(x)\pi(x) ;$$

ou bien que l'on veuille produire un échantillon de loi π . Une méthode naturelle (dite de *Monte-Carlo par chaîne de Markov* ou *MCMC*) consiste à générer les états successifs X_0, \dots, X_N d'une chaîne de Markov de noyau P à partir d'un état initial X_0 de loi quelconque (par exemple la loi uniforme ou une masse de Dirac). D'après les théorèmes 2.2.7 et 2.2.14, la fréquence empirique

$$S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k)$$

est (pour N assez grand!) une bonne approximation de $E_{\pi}(f)$, et la loi de X_N est proche de π .

3.1.1 Algorithme de Metropolis

Dans de nombreux cas, la loi π que l'on cherche à simuler n'est pas donnée a priori comme la mesure invariante d'une chaîne de Markov. L'algorithme de Metropolis produit une chaîne de Markov réversible par rapport à π .

On se donne une matrice de transition markovienne Q sur M , appelée *matrice de sélection*, telle que pour tout couple $(x, y) \in M$,

$$Q(x, y) > 0 \Rightarrow Q(y, x) > 0.$$

Soit $h :]0, \infty[\rightarrow]0, 1]$ une fonction vérifiant

$$h(u) = uh\left(\frac{1}{u}\right).$$

Par exemple

$$h(u) = \inf(u, 1),$$

ou bien

$$h(u) = \frac{u}{1+u}.$$

Pour $x \neq y$, posons

$$R(x, y) = \begin{cases} h\left(\frac{\pi(y)Q(y, x)}{\pi(x)Q(x, y)}\right) & \text{si } Q(x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

On construit alors une matrice de transition P définie par

$$P(x, y) = Q(x, y)R(x, y) \quad (3.2)$$

pour $x \neq y$, et

$$P(x, x) = 1 - \sum_{y \neq x} P(x, y).$$

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.1.1 *On suppose que π charge tous les points de M . La matrice P définie par (3.1) et (3.2) est réversible par rapport à π . Elle est irréductible si Q est irréductible. Si de plus $h(u) < 1$ (par exemple $h(u) = \frac{u}{1+u}$), elle est apériodique.*

L'algorithme suivant, correspondant à la simulation de la chaîne de noyau P , s'appelle *l'algorithme de Metropolis*.

Étape 0. Initialiser X_0 .

Étape $n + 1$.

(Sélection) Choisir y avec la loi $Q(X_n, y)$.

Tirer un nombre U au hasard dans $[0, 1]$.

Si $U < R(X_n, y)$ accepter la sélection :

$$X_{n+1} = y ;$$

Sinon, refuser la sélection :

$$X_{n+1} = X_n.$$

Exemple 3.1.2 (Le modèle des sphères dures). Soit S un ensemble fini et $G = (S, E)$ un graphe symétrique sur S . Une configuration de *sphères dures* sur G est une suite finie

$$x = (x(s))_{s \in S} \in \{0, 1\}^S$$

telle que

$$x(s)x(v) = 0$$

si s et v sont deux sites adjacents. La condition $x(s) = 1$ (respectivement $x(s) = 0$) s'interprète comme la présence (respectivement l'absence) d'une particule au site s . Les particules ont un diamètre non négligeable de sorte que deux particules ne peuvent pas occuper des positions voisines.

Soit $M \subset \{0, 1\}^S$ l'ensemble des configurations de sphères dures et π la probabilité uniforme sur M . L'algorithme suivant permet de simuler π .

Étape 0. (Initialisation) $X_0(s) = 0$ pour tout $s \in S$.

Étape $n + 1$.

Choisir un sommet s au hasard dans S .

Si tous les voisins de s sont libres, choisir U au hasard dans (Pile, Face).

Si $U = \text{Pile}$:

$$X_{n+1}(s) = 1 ;$$

Si $U = \text{Face}$:

$$X_{n+1}(s) = 0.$$

Exercice 3.1.3 1) Vérifier que l'algorithme précédent est un algorithme de Metropolis, pour la fonction $h(u) = \frac{u}{1+u}$ et la matrice de sélection $Q : M \times M \rightarrow [0, 1]$ définie par $Q(x, y) = \frac{1}{|S|}$ si x et y diffèrent en un seul site et $Q(x, y) = 0$ si x et y diffèrent en deux sites au moins. Vérifier ensuite que la chaîne ainsi produite est irréductible et apériodique.

2) Implanter l'algorithme pour différents graphes et en déduire une estimation numérique du nombre moyen de sphères $E_\pi(\sum_{s \in S} x(s))$.

Exercice 3.1.4 (q -coloriage). Soit $G = (S, E)$ un graphe symétrique sur S fini, et q un entier ≥ 1 . Un q -coloriage de G est une suite finie

$$x = (x(s))_{s \in S} \in \{1, \dots, q\}^S$$

telle que deux sites adjacents n'aient pas la même couleur, c'est-à-dire que $x(s) \neq x(v)$ pour s et v adjacents. La question de savoir si il existe ou non des q -coloriages sur un graphe quelconque est loin d'être évidente. Ainsi, si G est un triangle il n'existe pas de 2-coloriage de G . Si G est un graphe planaire alors, d'après le fameux théorème des quatre couleurs¹, il existe des q -coloriages de G pour $q \geq 4$.

1) Supposons qu'il existe des q -coloriages de G . Soit M l'ensemble des q -coloriages de G et π la loi uniforme sur M . Décrire un algorithme de Metropolis ayant π comme loi invariante. Montrer que la chaîne induite est apériodique.

2) Implanter l'algorithme.

¹«Quatre couleurs suffisent pour colorier une carte de sorte que deux régions adjacentes aient des couleurs différentes». Ce résultat difficile, conjecturé en 1852 par les frères Guthrie, n'a été démontré qu'en 1976 par Appel et Haken. La preuve d'Appel et Haken reste cependant controversée car elle repose, en partie, sur une vérification impossible sans l'aide d'un ordinateur.

3.1.2 Simulation des lois de Gibbs

Soit $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un réel positif. La *loi de Gibbs* associée à la fonction V et à la *température* T est la probabilité π_T définie sur M par

$$\pi_T(x) = \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{1}{T}V(x)\right)$$

où

$$Z_T = \sum_{y \in M} \exp\left(-\frac{1}{T}V(y)\right)$$

est la constante de normalisation. Dans le vocabulaire de la mécanique statistique (voir Georges et Mezard [7]), l'espace M représente l'ensemble des *configurations* d'un *système* décrit par une *fonction d'énergie* V . La mesure de Gibbs π_T caractérise alors l'équilibre thermodynamique du système en contact avec un thermostat à la température T . La constante Z_T s'appelle la *fonction de partition* du système.

La loi π_T est entièrement déterminée par la donnée de V et T , mais en pratique (notamment dans les problèmes de physique statistique) le cardinal de M est gigantesque et le calcul de Z_T est impossible. L'algorithme de Metropolis prend ici toute sa force car il évite ce calcul.

Supposons, pour simplifier, l'espace M muni d'une structure de graphe symétrique connexe. Notons, pour tout $x \in M$, $N(x)$ l'ensemble des voisins de x et $|N(x)|$ le cardinal de $N(x)$. Réécrivons l'algorithme de Metropolis.

Étape 0. Initialiser X_0 .

Étape $n + 1$.

(Sélection) Choisir y au hasard parmi les voisins de X_n .

Tirer un nombre U au hasard dans $[0, 1]$.

Si $U < h \left(\exp\left(\frac{1}{T}(V(X_n) - V(y))\right) \frac{|N(y)|}{|N(X_n)|} \right)$ accepter la sélection :

$$X_{n+1} = y ;$$

Sinon, refuser la sélection :

$$X_{n+1} = X_n.$$

Exemple 3.1.5 (Le modèle d'Ising). Le modèle d'Ising est un modèle simplifié de système magnétique constitué de N spins S_1, \dots, S_N en interactions, localisés aux nœuds d'un graphe (par exemple une "boîte" de \mathbb{Z}^d). Chaque spin peut prendre deux

valeurs : $S_i \in \{-1, 1\}$, de sorte que l'espace des configurations du système est

$$M = \{-1, 1\}^N.$$

L'énergie de la configuration $S = (S_1, \dots, S_N)$ est donnée par l'hamiltonien

$$V(S) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - \sum_i B_i S_i.$$

La matrice $J = (J_{ij})$ est symétrique et détermine les interactions entre spins. C'est ainsi que $J_{ij} = 0$ si i et j se sont pas voisins. Pour i et j adjacents, $J_{ij} > 0$ correspond à une interaction de type *ferromagnétique* (les spins S_i et S_j préfèrent être alignés) et $J_{ij} < 0$ à une interaction de type *antiferromagnétique* (S_i et S_j préfèrent être anti-alignés). Le coefficient B_i représente la force d'un champ magnétique extérieur, mesuré au site i .

Pour $S \in M = \{-1, 1\}^N$, notons $S^i \in M$ la configuration obtenue en retournant le spin i , c'est-à-dire $S_j^i = S_j$ pour $j \neq i$ et $S_i^i = -S_i$. La différence d'énergie entre les états S et S^i se calcule simplement et ne fait intervenir que les spins voisins de i :

$$V(S^i) - V(S) = S_i G_i,$$

où

$$G_i = \sum_j J_{ij} S_j + B_i$$

est le champ magnétique local en i . Soit Q la matrice de sélection définie par $Q(S, \tilde{S}) = \frac{1}{N}$ si $\tilde{S} = S^i$ et $Q(S, \tilde{S}) = 0$ sinon. L'algorithme de Metropolis s'écrit alors

Étape 0. Initialiser $X_0 \in M$.

Étape $n + 1$. On suppose $X_n = S$.

Choisir un site i au hasard.

Tirer un nombre U au hasard dans $[0, 1]$.

Si $U < h(\exp(\frac{1}{T} S_i G_i))$ retourner le spin i :

$$X_{n+1}(i) = -S_i.$$

Pour une discussion approfondie du modèle d'Ising et des exemples de simulation de Monte-Carlo, on pourra consulter avec profit le chapitre 5.2 du cours de physique statistique de Georges et Mezard [7].

3.1.3 Optimisation globale et recuit simulé

Le recuit simulé est un algorithme d'optimisation qui permet de calculer les minima globaux d'une fonction définie sur un ensemble fini. Avant de présenter l'algorithme, commençons par quelques remarques.

La compétition énergie-entropie

Revenons sur l'algorithme de Metropolis décrit dans la section 3.1.2. Nous savons, (théorème 2.2.26) que l'entropie de Kullback de la loi de X_n par rapport à π_T décroît au cours de temps. Ici cette entropie s'écrit

$$H(\mu, \pi_T) = \sum_{x \in M} \mu(x) \ln \left(\frac{\mu(x)}{\pi_T(x)} \right) = -S(\mu) + \frac{1}{T} \mathbb{E}_\mu(V) + \ln(Z_T),$$

où

$$S(\mu) = - \sum_{x \in M} \mu(x) \ln(\mu(x))$$

est l'entropie de μ , et

$$\mathbb{E}_\mu(V) = \sum_{x \in M} \mu(x) V(x)$$

est l'énergie moyenne pour la loi μ .

Si μ_n désigne la loi de X_n , l'algorithme de Metropolis est donc tel que la suite

$$\left(S(\mu_n) - \frac{1}{T} \mathbb{E}_{\mu_n}(V) \right)_{n \geq 0}$$

décroît au cours du temps.

À haute température, le terme d'entropie est dominant et les variables X_n se comportent approximativement comme des variables i.i.d. de loi uniforme sur M . À basse température, c'est le terme d'énergie qui domine, et l'algorithme de Metropolis vise essentiellement à minimiser V .

Cette compétition entre énergie et entropie se retrouve à l'équilibre, comme en témoigne le lemme suivant.

Lemme 3.1.6 (a)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T(x) = \frac{1}{|M|}.$$

(b) Soit V_{\min} l'ensemble des minima globaux de V . Alors

$$\lim_{T \rightarrow 0} \pi_T(x) = \frac{\mathbf{1}_{\{x \in V_{\min}\}}}{|V_{\min}|}.$$

DÉMONSTRATION :

Pour $x \neq y$

$$\frac{\pi_T(x)}{\pi_T(y)} = \exp\left(-\frac{1}{T}(V(x) - V(y))\right),$$

d'où le résultat.

Le recuit simulé

Le *recuit* est une technique utilisée en métallurgie qui consiste à faire fondre plusieurs fois un métal puis à le laisser lentement refroidir pour en améliorer les qualités mécaniques. L'algorithme du *recuit simulé* est inspiré de cette technique. On se donne une suite décroissante de températures $\{T(n)\}_{n \geq 0}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = 0$. L'algorithme est alors semblable à l'algorithme de Metropolis, à l'exception près que la température évolue dans le temps.

Étape 0. Initialiser X_0 .

Étape $n + 1$.

(Sélection) Choisir y au hasard parmi les voisins de X_n .

Tirer un nombre U au hasard dans $[0, 1]$.

Si $U < h\left(\exp\left(\frac{1}{T(n)}(V(X_n) - V(y))\frac{|N(y)|}{|N(X_n)|}\right)\right)$ accepter la sélection :

$$X_{n+1} = y ;$$

sinon, refuser la sélection :

$$X_{n+1} = X_n.$$

Le choix du schéma de décroissance est crucial dans cet algorithme car une décroissance trop rapide peut piéger X_n dans le voisinage d'un minimum local (un acier trop rapidement refroidi a de mauvaises propriétés mécaniques).

Le théorème suivant dû à Hajek [47] est un des résultats de base sur la convergence du recuit simulé. Nous en donnerons une preuve (dans un cas particulier) dans la section 3.3. On pourra consulter Duflou [18, chapitre 6] ou Ycart [34, chapitre 4] pour des généralisations et des références bibliographiques.

Théorème 3.1.7 *Il existe une constante $C(V) > 0$ (dépendante de V) telle que, si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = 0 \text{ et } \sum_n \exp\left(-\frac{C(V)}{T(n)}\right) = \infty,$$

l'algorithme du recuit simulé sélectionne les minima globaux de V , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in V_{\min}) = 1.$$

Pour implanter l'algorithme, on pourra choisir l'un des schémas de température suivant :

(i) (décroissance logarithmique)

$$T(n) = \frac{C}{\ln(n)}$$

ou

(ii) (recuit par palier)

$$T(n) = \frac{1}{k} \text{ pour } e^{(k-1)C} \leq n < e^{kC}.$$

Si $C > C(V)$, les conditions du théorème 3.1.7 sont vérifiées. Malheureusement, bien que la constante $C(V)$ s'exprime en fonction de V (voir par exemple Ycart [34, Chapitre 4]), son calcul pratique est en général impossible.

Exemple 3.1.8 (Le voyageur de commerce). Un voyageur de commerce doit visiter un ensemble $\{1, \dots, d\}$ de villes, revenir chez lui et, pour économiser du temps et de l'argent, minimiser la distance parcourue.

Si nous supposons que le voyageur part de 1, l'espace d'état M est l'ensemble de tous les itinéraires possibles $x = (x(1), \dots, x(d))$ où $x(1) = 1$ et $(x(2), \dots, x(d))$ est une permutation de $\{2, \dots, d\}$. Le cardinal de M est donc $(d-1)!$. En notant $x(d+1) = x(1)$ le coût à minimiser est

$$V(x) = \sum_{i=1}^d \text{dist}(x(i), x(i+1))$$

où $\text{dist}(a, b)$ désigne la distance de a à b .

Pour implanter l'algorithme du recuit il faut définir une relation de voisinage sur M . Le plus simple consiste à échanger deux villes : x et y sont voisins si pour un couple $2 \leq i < j \leq d$, $x(i) = y(j)$, $x(j) = y(i)$, et les autres coordonnées restent inchangées.

Les figures suivantes sont le résultat de l'algorithme du recuit simulé avec 100 villes disposées régulièrement dans le premier cas et 30 villes choisies au hasard dans le second. Dans les deux cas le circuit initial est choisi au hasard².

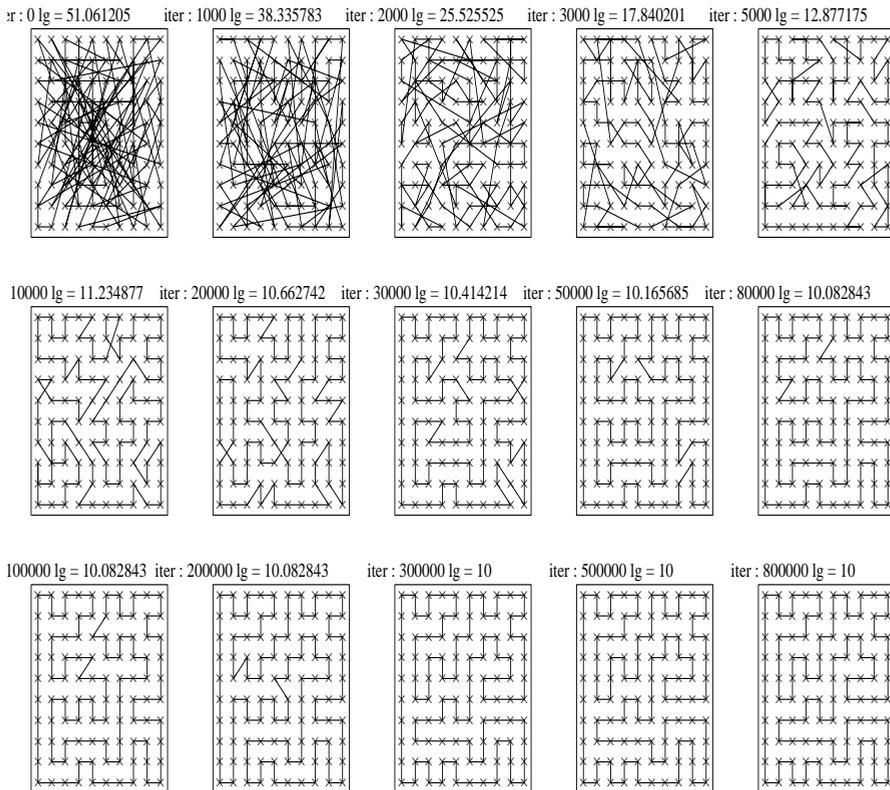


Figure 3.1 *Le voyageur du commerce avec 100 villes.*

²Pour tester ces algorithmes on pourra consulter le site de l'école "<http://w3.edu.polytechnique.fr/mathematiques-appliquees/index.html>"

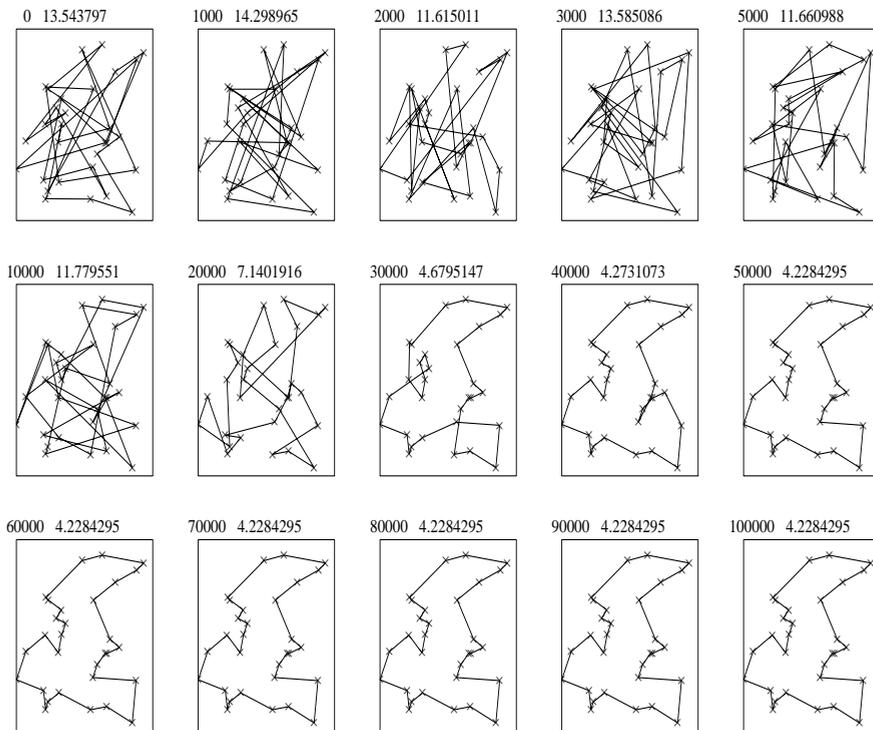


Figure 3.2 *Le voyageur de commerce avec 30 villes au hasard.*

Exercice 3.1.9 (Rangement optimal). Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe symétrique et $M \subset \{0, 1\}^S$ l'ensemble des configurations de sphères dures sur G (une configuration de sphère dure est définie dans l'exemple 3.1.2). Supposons que l'on cherche à "ranger" le maximum de sphères dures sur G . Le coût à minimiser est alors

$$V(x) = - \sum_{s \in S} x(s).$$

Écrire un algorithme de recuit pour minimiser V . Implanter et tester l'algorithme.

3.1.4 Remarques sur les méthodes de Monte-Carlo

Le succès des méthodes de Monte-Carlo provient de la facilité de leur mise en œuvre³ et de la performance toujours croissante des moyens de calcul. Il subsiste néanmoins deux problèmes essentiels inhérents à cette approche :

- (i) la distribution simulée (*i.e.* la loi de X_N) n'est jamais exactement la distribution cherchée⁴ ;
- (ii) il n'existe pas de moyen universel simple permettant d'estimer l'erreur commise dans l'approximation

$$\text{Loi}(X_N) \sim \pi.$$

Plus précisément, pour $\epsilon > 0$ fixé, nous savons (théorème 2.2.14) que l'entier

$$N(\epsilon) = \inf \left\{ n \geq 0 : \sup_{m \geq n, x \in M} |\mathbb{P}(X_m = x) - \pi(x)| \leq \epsilon \right\}$$

est bien défini, mais son calcul est en général impossible. Aussi, dans la pratique, le choix du nombre de pas de simulation est plus souvent affaire d'intuition ou d'expérimentation que d'analyse rigoureuse.

Le second problème est à l'origine de nombreux travaux théoriques récents sur lesquels nous reviendrons dans la section 3.3. Quant au premier, il n'est pas fondamental, car dans bien des cas une petite erreur sur la distribution simulée est acceptable ; à condition bien sûr de pouvoir estimer cette erreur (ce qui nous ramène au second problème).

3.2 Simulation exacte : l'algorithme de Propp-Wilson

En 1996, Jim Propp et David Wilson ont proposé (dans [54]) un remarquable algorithme de simulation qui contourne les deux problèmes mentionnés dans la section 3.1.4 en ce sens que :

- (i) la distribution simulée est *exactement* la distribution cherchée ;
- (ii) l'algorithme s'arrête en un temps (aléatoire) fini.

³Le lecteur ayant pris la peine de programmer quelques-uns des algorithmes présentés en est convaincu.

⁴sauf bien sûr dans le cas particulier, sans intérêt, où X_0 est distribué selon π .

Soit P un noyau sur M . On suppose que P est le noyau induit par un système dynamique aléatoire (f, m) , c'est-à-dire (voir chapitre 2)

$$P(x, y) = m(\theta \in \Theta : f_\theta(x) = y)$$

où Θ est un ensemble de paramètres, m une probabilité sur Θ et $f : \Theta \times M \rightarrow M$ une application (mesurable). Rappelons (voir chapitre 2, théorème 2.4.3) que cette hypothèse n'est en rien restrictive car tout noyau markovien est induit par un système dynamique aléatoire. Soient (θ_n) une suite de variables i.i.d. de loi m , D_n et $G_n : M \rightarrow M$ les applications aléatoires définies par

$$D_n = f_{\theta_1} \circ \dots \circ f_{\theta_n} \text{ et } G_n = f_{\theta_n} \circ \dots \circ f_{\theta_1}.$$

Les méthodes classiques de simulation par chaîne de Markov décrites précédemment sont basées sur la simulation de G_n . L'originalité de la méthode de Propp-Wilson consiste à simuler D_n !

Soit Cst l'ensemble des applications constantes de M dans M . L'algorithme s'écrit alors

Étape 0. (Initialisation) $D_0(x) = x$ pour tout x .

Étape $n + 1$.

Si $D_n \notin \text{Cst}$

Tirer θ_{n+1} de loi m ,

$D_{n+1} = D_n \circ f_{\theta_{n+1}}$.

Sinon, fin.

Le résultat produit par l'algorithme (si il s'arrête!) est donc la variable aléatoire

$$Z = D_{T_c}(x) \forall x$$

où

$$T_c = \inf\{n \in \mathbb{N} : D_n \in \text{Cst}\}$$

est le *temps de coalescence* de (D_n) .

Nous avons déjà utilisé cet algorithme pour prouver le théorème ergodique (théorème 2.2.14) des chaînes de Markov finies en choisissant une représentation particulière (f, m) assurant que T_c soit fini presque sûrement. Dans les problèmes de simulations, le choix du système (f, m) est souvent dicté par la nature du système à simuler ou par des considérations informatiques. Il faut donc d'abord s'assurer que T_c est fini.

Théorème 3.2.1 *On suppose P irréductible apériodique et $T_c < \infty$ presque sûrement. Alors la variable Z (le résultat de l'algorithme) est distribuée selon π .*

DÉMONSTRATION :

Le point fondamental est le suivant :

$$\forall n \geq T_c, D_n = D_{T_c}.$$

En particulier, la suite (D_n) converge (presque sûrement) vers D_{T_c} , et (par convergence dominée)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_n(x) = y) = \mathbb{P}(D_{T_c}(x) = y).$$

Comme les variables D_n et G_n ont même loi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_n(x) = y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G_n(x) = y) = \pi(y),$$

où la dernière égalité se déduit du théorème ergodique (théorème 2.2.14).

3.2.1 Remarques sur l'algorithme de Propp et Wilson

À propos de la coalescence

L'exemple suivant (extrait du livre d'Ycart [34]) montre que "l'irréductibilité forte de P " n'est pas suffisante pour assurer la coalescence de (D_n) . Soit $M = \{0, 1\}$ et P le noyau sur M défini par $P(x, y) = \frac{1}{2}$ pour tout $x, y \in M$. Soit $\Theta = \{0, 1\}$ muni de la loi $m = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ et f_θ l'application définie par

$$f_\theta(x) = \theta x + (1 - \theta)(1 - x).$$

Il est clair que le noyau induit par le système dynamique (f, m) est P . Cependant $D_n \in \{f_0, f_1\}$ pour tout n . D'où $T_c = \infty$.

Pour éviter ce type de problème, il suffit de choisir un système dynamique de noyau P tel que

$$\forall A \subset M, |A| > 1 \Rightarrow m(\theta \in \Theta : |f_\theta(A)| < |A|) \geq \alpha > 0.$$

Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|f_{\theta_1}(E)| \leq d - 1) &\geq \alpha, \\ \mathbb{P}(|f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2}(E)| \leq d - 2) &\geq \sum_{A \subset M : |A| \leq d-1} \mathbb{P}(|f_{\theta_1}(A)| \leq d - 2) \mathbb{P}(f_{\theta_2}(E) = A) \geq \alpha^2 \end{aligned}$$

et, par récurrence,

$$P(D_{d-1} \in \text{Cst}) \geq \alpha^{d-1} > 0.$$

D'où

$$P(T_c \geq k(d-1)) \leq (1 - \alpha^{d-1})^k \rightarrow 0.$$

Simulation exacte de systèmes monotones

L'inconvénient évident de l'algorithme de Propp-Wilson est qu'il nécessite *a priori* le calcul de $D_n(x)$ **pour tout** $x \in M$, à chaque instant de simulation. Dans les problèmes de grandes tailles (et les problèmes intéressants sont de grande taille!), un tel calcul est tout simplement impossible. L'intérêt de l'algorithme vient du fait qu'il est possible dans certains cas de vérifier la coalescence de (D_n) en ne calculant $D_n(x)$ que pour quelques points particuliers de M . La situation typique est celle des *systèmes monotones*.

Supposons que M soit muni d'une relation d'ordre partielle (notée \leq). Le système dynamique (f, m) est dit *monotone* si pour chaque $\theta \in \Theta$ (ou pour m -presque chaque θ) l'application $f_\theta : M \rightarrow M$ est *monotone*, c'est-à-dire

$$x \leq y \Rightarrow f_\theta(x) \leq f_\theta(y).$$

Supposons de plus qu'il existe dans M deux éléments x_{inf} et x_{sup} tels que

$$x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}}$$

pour tout $x \in M$. Alors, par monotonie, l'instant de coalescence est le premier instant où $D_n(x_{\text{inf}}) = D_n(x_{\text{sup}})$.

L'exemple suivant est fondamental. Il est sans aucun doute à l'origine de l'important succès de l'algorithme de Propp et Wilson.

Exercice 3.2.2 On considère un modèle d'Ising (voir exemple 3.1.5) ferromagnétique (*i.e.* $J_{ij} \geq 0$). L'espace d'états $M = \{-1, 1\}^N$ est muni de la relation d'ordre partielle

$$S \leq \tilde{S} \Leftrightarrow S_i \leq \tilde{S}_i \forall i = 1, \dots, N.$$

Montrer qu'il existe un système dynamique monotone dont le noyau induit est irréductible apériodique et admet π_T (la mesure de Gibbs à température T) pour loi invariante. En déduire un algorithme de simulation exacte de π_T .

◇

... Pour en savoir plus ...

3.3 Vitesse

Nous esquissons ici l'étude précise de la vitesse de convergence des chaînes de Markov finies. Cette section n'est pas essentielle à la compréhension du reste du chapitre ni à la mise en œuvre pratique des algorithmes décrits précédemment. Elle s'adresse plutôt au lecteur intéressé par les questions théoriques. Notre motivation principale est d'introduire quelques-unes des techniques qui permettent de déterminer le nombre de pas de simulation d'un algorithme de Metropolis et de donner une preuve de la convergence de l'algorithme du recuit simulé. Cette section s'inspire du chapitre 6 de Duflou [18] et du chapitre 4 d'Ycart [34]. Pour plus de détails on pourra consulter, outre ces références, Saloff-Coste [28].

Hypothèses et notations Dans toute la suite M désigne un ensemble fini de cardinal d , π une probabilité sur M qui charge tous les points (*i.e.* $\pi(x) > 0$) et P un noyau markovien sur M admettant π comme probabilité invariante. On note $l^2(\pi)$ l'espace vectoriel euclidien de dimension d constitué des fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in M} f(x)g(x)\pi(x).$$

La norme associée est notée

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Nous notons $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. La valeur moyenne de f sous π est notée indifféremment

$$\sum_x f(x)\pi(x) = \langle f, \mathbf{1} \rangle = \mathbb{E}_\pi(f) = \pi f$$

et sa variance

$$\text{var}_\pi(f) = \mathbb{E}_\pi((f - \pi f)^2) = \|f - \pi f\|_2^2.$$

Rappelons que P est un opérateur linéaire défini par

$$Pf(x) = \sum_y P(x, y)f(y).$$

3.3.1 Spectre des transitions réversibles

Le noyau P est dit *autoadjoint* si pour tout couple $f, g \in l^2(\pi)$

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle.$$

Lemme 3.3.1 P est autoadjoint si et seulement si P est réversible par rapport à π .

DÉMONSTRATION :

Par définition

$$\langle Pf, g \rangle = \sum_{x,y} \pi(x)P(x,y)f(y)g(x)$$

et

$$\langle f, Pg \rangle = \sum_{x,y} \pi(y)P(y,x)f(y)g(x).$$

Si P est réversible, $\pi(y)P(y,x) = \pi(x)P(x,y)$ et donc, $\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$. Réciproquement, si P est autoadjoint, l'égalité $\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$ appliquée aux fonctions $f = \mathbf{1}_x$ et $g = \mathbf{1}_y$ prouve que $\pi(y)P(y,x) = \pi(x)P(x,y)$.

La proposition suivante résume les propriétés du spectre d'une transition réversible.

Proposition 3.3.2 *On suppose P réversible par rapport à π . Alors*

(i) *les valeurs propres de P sont réelles, de module ≤ 1 et 1 est toujours valeur propre. On peut donc ordonner ces valeurs propres :*

$$1 = \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d \geq -1 ;$$

(ii) *si P est irréductible, 1 est valeur propre simple :*

$$1 = \beta_1 > \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d \geq -1 ;$$

(iii) *si P est irréductible et apériodique, -1 n'est pas valeur propre :*

$$1 = \beta_1 > \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d > -1.$$

DÉMONSTRATION :

(i) Le noyau P étant autoadjoint, il est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. L'application constante $\mathbf{1}$ est trivialement une fonction propre associée à la valeur propre 1. Enfin, si f est une fonction propre associée à la valeur propre β ,

$$|\beta| \|f\|_\infty = \|Pf\|_\infty = \sup_x |Pf(x)| \leq \sup_x \sum_y P(x,y)|f(y)| \leq \|f\|_\infty.$$

D'où $|\beta| \leq 1$.

(ii) Si P est irréductible, nous savons (proposition 2.2.5) que l'équation $Pf = f$ n'est possible que si f est constante (*i.e.* colinéaire à $\mathbf{1}$).

(iii) Si -1 est valeur propre, il existe $f \in l^2(\pi)$ non nulle telle que $Pf = -f$. D'où $P^{2n+1}f = -f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons maintenant P irréductible et apériodique. Alors, d'après le théorème ergodique 2.2.7, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n+1}f(x) = \pi f$. D'où $-f = \pi f$, ce qui est absurde.

3.3.2 Vitesse de convergence des noyaux réversibles

Si P est réversible, il est autoadjoint (lemme 3.3.1), donc diagonalisable dans une base ortho-normée de fonctions propres :

$$\Psi_1 = \mathbf{1}, \Psi_2, \dots, \Psi_d.$$

Pour toute fonction $f \in l^2(\pi)$,

$$f = \sum_{i=1}^d \langle f, \Psi_i \rangle \Psi_i = (\pi f) \mathbf{1} + \sum_{i=2}^d \langle f, \Psi_i \rangle \Psi_i.$$

D'où

$$P^n f - \pi f = \sum_{i=2}^d \beta_i^n \langle f, \Psi_i \rangle \Psi_i. \quad (3.3)$$

Cette identité va nous permettre de (re)démontrer (pour la troisième fois!) le théorème ergodique 2.2.7 (ici dans le cas réversible). Cette nouvelle preuve est purement algébrique et s'accompagne d'une estimation précise de la vitesse de convergence.

Théorème 3.3.3 *Supposons P réversible, irréductible et aperiodique. Alors*

(i) *pour toute fonction $f \in l^2(\pi)$,*

$$|\mathbb{E}(f(X_n^x)) - \mathbb{E}_\pi(f)|^2 = |P^n f(x) - \mathbb{E}_\pi(f)|^2 \leq c(x) \rho^{2n-2} \text{var}_\pi(f),$$

où

$$c(x) = \frac{P^2(x, x)}{\pi(x)}$$

et

$$\rho = \rho(P) = \sup(\beta_2, |\beta_d|) < 1 ;$$

(ii) *en particulier, pour tout $x \in M$ et pour tout $A \subset M$,*

$$|\mathbb{P}(X_n^x \in A) - \pi(A)|^2 \leq \frac{1}{4} c(x) \rho^{2n-2}.$$

DÉMONSTRATION :

En remplaçant f par $f - \mathbb{E}_\pi(f)$, nous pouvons toujours supposer que $\mathbb{E}_\pi(f) = 0$. D'après (3.3)

$$\|P^n f\|_2^2 = \sum_{i=2}^d \beta_i^{2n} \langle f, \Psi_i \rangle^2 \leq \rho^{2n} \|f\|_2^2.$$

Posons $\Phi = P^{n-1} f$. Alors, en utilisant la réversibilité,

$$P\Phi(x) = \sum_y P(x, y) \Phi(y) = \sum_y \frac{P(y, x)}{\pi(x)} \Phi(y) \pi(y) = \langle g_x, \Phi \rangle$$

où g_x est la fonction définie par

$$g_x(y) = \frac{P(y, x)}{\pi(x)}.$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|P\Phi(x)|^2 \leq \|g_x\|_2^2 \|\Phi\|_2^2 = c(x) \|\Phi\|_2^2 \leq c(x) \rho^{2n-2} \|f\|_2^2.$$

Ce qui prouve (i). Pour prouver (ii), il suffit d'appliquer (i) à $\mathbf{1}_A$ en remarquant que $\text{var}_\pi(\mathbf{1}_A) = \pi(A)(1 - \pi(A)) \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 3.3.4 (D'après Liu (Voir Diaconis et Saloff-Coste [42])). Soit $M = \{1, \dots, d\}$ et π une probabilité sur M que l'on cherche à simuler. Soit q une probabilité sur M facilement

simulable. On considère sur M la chaîne de Markov induite par l'algorithme de Metropolis (voir équation (3.2)) où la matrice de sélection Q est donnée par $Q(x, y) = q(y)$; et $h(u) = \inf(u, 1)$. Soient $S_q(i) = q(i) + \dots + q(d)$ et $S_\pi(i) = \pi(i) + \dots + \pi(d)$.

1) Montrer que les valeurs propres de la chaîne sont données par

$$1 = \beta_0 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{d-1} \geq 0$$

avec

$$\beta_i = S_q(i) - \frac{q(i)}{\pi(i)} S_\pi(i).$$

On pourra vérifier que le vecteur

$$(0, \dots, 0, S_\pi(i+1), -\pi(i), \dots, -\pi(i))$$

est un vecteur propre associé à β_i .

2) On suppose $p(i) = 1/d$ et $\pi(i) = \frac{\theta^{i-1}}{Z}$, avec $Z = \frac{1-\theta^d}{1-\theta}$ et $0 < \theta < 1$. En utilisant le théorème 3.3.3, majorer le nombre de pas nécessaires pour atteindre l'équilibre avec une précision donnée.

3.3.3 Formes de Dirichlet, trou spectral et inégalités de Poincaré

À l'exception de cas très particuliers (comme l'exemple 2.2.19), le calcul explicite du coefficient $\rho(P) = \sup(\beta_2, |\beta_d|)$ est impossible. Il existe néanmoins un ensemble de techniques qui permettent de l'estimer à partir de la géométrie du graphe associé à P .

L'adjoint de P , noté P^* , est le noyau défini par

$$P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(x, y).$$

Il vérifie la relation

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, P^*g \rangle.$$

Forme de Dirichlet

Nous avons déjà rencontré la forme de Dirichlet d'un noyau P dans la preuve de la proposition 2.2.5. Elle est définie pour tout $f \in l^2(\pi)$ par

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle (I - P)f, f \rangle.$$

Lemme 3.3.5 Pour tout $f \in l^2(\pi)$

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle (I - P)f, f \rangle = \langle (I - \frac{P + P^*}{2})f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y} (f(x) - f(y))^2 P(x, y) \pi(x).$$

DÉMONSTRATION :

La première égalité est immédiate car $\langle P^* f, f \rangle = \langle Pf, f \rangle$. Pour prouver la seconde remarquons que $\mathcal{E}(f, f) = \mathbf{E}((f(X_0) - Pf(X_0))f(X_0))$ pour X_0 de loi π . D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, f) &= \mathbf{E}((f(X_0) - \mathbf{E}(f(X_1)|X_0))f(X_0)) = \mathbf{E}((f(X_0)^2 - \mathbf{E}(f(X_1)f(X_0))) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{E}(f(X_0) - f(X_1))^2.\end{aligned}$$

Définition 3.3.6 Le trou spectral du noyau P est défini par

$$\lambda = \lambda(P) = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{var}_\pi(f)} ; \text{var}_\pi(f) \neq 0 \right\}.$$

La forme de Dirichlet étant une forme positive (lemme 3.3.5), λ est positif ou nul. Remarquons que λ n'est pas en général une valeur propre de $I - P$. Dans le cas particulier important où P est réversible (par rapport à π) alors λ est la plus petite valeur propre non nulle de $I - P$, c'est-à-dire

$$\lambda = 1 - \beta_2.$$

Dans le cas général c'est la plus petite valeur propre non nulle de $I - \frac{1}{2}(P + P^*)$.

Voyons tout de suite comment le trou spectral permet d'estimer la vitesse de convergence d'une chaîne de Markov vers sa mesure d'équilibre.

Proposition 3.3.7 On suppose les conditions du théorème 3.3.3 satisfaites. On suppose de plus que

$$P(x, x) \geq 1/2$$

pour tout x . Alors les conclusions du théorèmes 3.3.3 restent valables en remplaçant ρ par $1 - \lambda(P)$.

DÉMONSTRATION :

Soit β une valeur propre de P et f un vecteur propre associé. Soit $x \in M$ tel que $|f(x)| = \sup_{y \in M} |f(y)| > 0$. Alors

$$\sum_{y \neq x} P(x, y)f(y) = (\beta - P(x, x))f(x).$$

D'où

$$|\beta - P(x, x)| \leq \sum_{y \neq x} P(x, y)|f(y)|/|f(x)| \leq 1 - P(x, x)$$

et

$$\beta \geq 2P(x, x) - 1 \geq 0.$$

Les valeurs propres de P sont donc positives ou nulles. Cela montre que $\beta_2 \geq |\beta_d| = \beta_d$. D'où $\rho = \beta_2 = 1 - \lambda$.

Exercice 3.3.8 1) Montrer que si P est réversible et positif (*i.e.* $\langle Pf, f \rangle \geq 0$) alors la proposition précédente est vraie sans l'hypothèse $P(x, x) \geq 1/2$.

2) Montrer que si P est réversible, P^2 est toujours positif. Que peut-on en déduire?

Avant d'énoncer le résultat suivant, il est utile d'introduire la *distance du χ^2* entre deux mesures de probabilité. Soient μ et π deux probabilités sur M . Comme toujours, nous supposons que π charge tous les points de M . Soit $h = \frac{\mu}{\pi}$ la densité de μ par rapport à π et, pour $p \geq 1$,

$$\|h - 1\|_p = \left(\sum_x |h(x) - 1|^p \pi(x) \right)^{1/p}.$$

Pour $p = 2$, cette quantité s'appelle la distance⁵ du χ^2 entre μ et π . Nous la notons $\chi(\mu, \pi)$.

Exercice 3.3.9 Soit $|\mu - \pi| = \sup_{A \subset M} |\pi(A) - \mu(A)|$ la *distance en variation totale* entre μ et π . Montrer que

- (i) $\frac{1}{2} \|h - 1\|_1 = \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \pi(x)| = |\mu - \pi|$;
- (ii) en déduire que $|\mu - \pi| \leq \frac{1}{2} \chi(\mu, \pi)$.

Théorème 3.3.10 Soit P un noyau markovien (non nécessairement réversible) apériodique, irréductible de loi invariante π . Alors pour toute loi μ sur M

$$\chi^2(\mu P^n, \pi) \leq (1 - \lambda(PP^*))^n \chi^2(\mu, \pi).$$

DÉMONSTRATION :

Soit $\rho_n(x) = \frac{\mu P^n(x)}{\pi(x)}$. Notons \mathcal{E}' la forme de Dirichlet du noyau PP^* . Alors

$$\mathcal{E}'(\rho_n) = \langle \rho_n, (I - PP^*)\rho_n \rangle = \text{var}_\pi(\rho_n) - \text{var}_\pi(P^*\rho_n).$$

Par définition de P^* et de ρ_n ,

$$\text{var}_\pi(P^*\rho_n) = \rho_{n+1}.$$

D'où

$$\text{var}_\pi(\rho_n) = \mathcal{E}'(\rho_n) + \text{var}_\pi(\rho_{n+1}) \geq \lambda(PP^*)\text{var}_\pi(\rho_n) + \text{var}_\pi(\rho_{n+1}).$$

Comme, par ailleurs, par définition de χ

$$\chi^2(\mu P^n, \pi) = \text{var}_\pi(\rho_n),$$

cela prouve que

$$\chi^2(\mu P^{n+1}, \pi) \leq (1 - \lambda(PP^*))\chi^2(\mu P^n, \pi).$$

⁵Remarquons que ce n'est pas une distance !

L'inégalité de Poincaré

Une inégalité de Poincaré est une inégalité de la forme

$$\text{var}_\pi(f) \leq C\mathcal{E}(f, f).$$

Si une telle inégalité a lieu alors, par définition du trou spectral,

$$\lambda \geq 1/C.$$

Pour simplifier, on suppose ici P réversible par rapport à π (si P est non réversible voir [28]). Pour toute arête $e = (e_-, e_+) \in M^2$, on note

$$Q(e) = \pi(e_-)P(e_-, e_+)$$

le poids de e . Un chemin γ de longueur k est une suite x_0, \dots, x_k d'éléments de M tels que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$. On peut aussi voir γ comme une suite d'arêtes $\gamma = (e_1, \dots, e_k)$ où $e_i = (x_{i-1}, x_i)$. Soit Γ l'ensemble des chemins dont tous les arcs sont distincts (i.e. $e_i \neq e_j$ pour $i \neq j$) et $\Gamma(x, y)$ le sous-ensemble de Γ constitué des chemins allant de x à y , c'est-à-dire

$$\Gamma(x, y) = \{\gamma = (x_0, \dots, x_k) \in \Gamma : x = x_0, y = x_k\}.$$

Le résultat suivant est dû à Diaconis et Stroock [43]. Nous suivons ici Saloff-Coste [28].

Théorème 3.3.11 *On suppose P réversible et irréductible. Pour chaque $(x, y) \in M \times M$ avec $x \neq y$ choisissons un chemin $\gamma(x, y) \in \Gamma(x, y)$. Alors*

$$\lambda(P) \geq \frac{1}{A},$$

où

$$A = \sup_e \left\{ Q(e)^{-1} \sum_{\{x, y : e \in \gamma(x, y)\}} |\gamma(x, y)| \pi(x) \pi(y) \right\}.$$

DÉMONSTRATION :

Pour $e = (e_-, e_+)$ notons $df(e) = f(e_+) - f(e_-)$. Alors, pour tout $(x, y) \in M^2$

$$|f(y) - f(x)|^2 = \left[\sum_{e \in \gamma(x, y)} df(e) \right]^2 \leq |\gamma(x, y)| \sum_{e \in \gamma(x, y)} df(e)^2.$$

Ainsi, en multipliant chacun des termes par $\frac{1}{2}\pi(x)\pi(y)$ puis en sommant sur x, y , on obtient

$$\begin{aligned} \text{var}_\pi(f) &\leq \frac{1}{2} \sum_{x, y} |\gamma(x, y)| \sum_{e \in \gamma(x, y)} df(e)^2 \pi(x) \pi(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \left[Q(e)^{-1} \sum_{x, y : e \in \gamma(x, y)} |\gamma(x, y)| \pi(x) \pi(y) \right] df(e)^2 Q(e) \\ &\leq \sup_{e \in E} \left[Q(e)^{-1} \sum_{x, y : e \in \gamma(x, y)} |\gamma(x, y)| \pi(x) \pi(y) \right] \mathcal{E}(f, f). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.12 (L'urne d'Ehrenfest, (vi)). Soit $M = \{0, 1\}^N$ l'espace d'états de l'urne d'Ehrenfest dans sa version microscopique et P le noyau défini par $P(x, y) = \frac{\epsilon}{N}$ pour $|x - y| = 1$, $P(x, x) = 1 - \epsilon$ et $P(x, y) = 0$ sinon. Pour $x \neq y$, soit $\gamma(x, y)$ le chemin obtenu en modifiant une à une les coordonnées x_1, x_2, \dots de x pour arriver à y . La longueur de $\gamma(x, y)$ est au plus N et comme $Q(e) = 2^{-N} \frac{\epsilon}{N}$, il vient

$$A \leq \frac{1}{\epsilon} 2^{-N} N^2 \sup_e \text{card}\{(x, y) : e \in \gamma(x, y)\}.$$

Il reste donc à calculer pour chaque arête e le nombre de chemins $\gamma(x, y)$ qui empruntent e . Soit $e = (e_-, e_+)$. Il existe un unique i tel que $e_{-,i} \neq e_{+,i}$. Donc si $e \in \gamma(x, y)$ $x_j = e_{-,j}$ pour $j \geq i$ et $y_j = e_{+,j}$ pour $j \leq i$. Ainsi il y a exactement $i - 1$ coordonnées pour x et $n - i$ coordonnées pour y qui sont inconnues. D'où $\text{card}\{(x, y) : e \in \gamma(x, y)\} = 2^{N-1}$. Ainsi

$$A \leq \frac{N^2}{2\epsilon}$$

et donc

$$\lambda \geq \frac{2\epsilon}{N^2}.$$

Dans cet exemple la valeur exacte de λ peut être calculée et est en fait égale à

$$\lambda = \frac{2\epsilon}{N}.$$

3.3.4 Application à la simulation des lois de Gibbs

Nous revenons dans cette section sur l'algorithme de Metropolis pour simuler les lois de Gibbs (voir section 3.1.2). Pour simplifier, nous supposons ici que la fonction V prend des valeurs distinctes en des points voisins :

$$x \text{ voisin de } y \Rightarrow V(x) \neq V(y),$$

et nous nous limitons aux dynamiques utilisant la fonction

$$h(u) = \min(u, 1).$$

Ces hypothèses sont certes (un peu) restrictives mais elles simplifient l'analyse. Quitte à remplacer V par $(V - \inf_x V(x))$ nous supposons de plus que

$$\inf_{x \in M} V(x) = 0.$$

Rappelons que nous notons V_{min} l'ensemble des minima de V , c'est-à-dire, ici,

$$V_{min} = \{x \in M : V(x) = 0\}.$$

L'*élévation* d'un chemin $\gamma = (x_0, \dots, x_k) \in \Gamma$ est définie par

$$\text{Elev}(\gamma) = \sup_{i=0, \dots, k} V(x_i).$$

Pour tout couple $(x, y) \in M \times M$ avec $x \neq y$, choisissons $\gamma(x, y) \in \Gamma(x, y)$ un chemin d'élévation minimale :

$$\text{Elev}(\gamma(x, y)) = \inf\{\text{Elev}(\gamma) : \gamma \in \Gamma(x, y)\}.$$

La *hauteur de communication* de V est définie par

$$C(V) = \sup_{x \in M} \inf\{\text{Elev}(\gamma(x, y)) - V(x) : y \in V_{min}\}.$$

Notons P_T le noyau de la chaîne à la température T . La proposition suivante relie le trou spectral de P_T à la hauteur de communication de V .

Proposition 3.3.13

$$\lambda(P_T) \geq \frac{1}{d^3} \exp\left(-\frac{C(V)}{T}\right).$$

DÉMONSTRATION :

C'est une conséquence de l'inégalité de Poincaré 3.3.11. Pour tout arête $e \in \gamma(x, y)$

$$Q(e)^{-1} = Z_T \exp\left(\frac{1}{T} \sup(V(e_-), V(e_+))\right) \leq Z_T \exp\left(\frac{1}{T} \text{Elev}(\gamma(x, y))\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} Q(e)^{-1} \sum_{x, y: e \in \gamma(x, y)} |\gamma(x, y)| \pi_T(x) \pi_T(y) &\leq \frac{1}{Z_T} \sum_{x, y: e \in \gamma(x, y)} d \exp\left(\frac{1}{T} \text{Elev}(\gamma(x, y)) - V(x) - V(y)\right) \\ &\leq d^3 \frac{1}{Z_T} \exp\left(\frac{1}{T} L\right) \end{aligned}$$

où

$$L = \sup_{x \neq y} \text{Elev}(\gamma(x, y)) - V(x) - V(y).$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $Z_T \geq 1$ et $L = C(V)$. La première inégalité est immédiate. En effet, soit $y_0 \in V_{\min}$, alors $Z_T \geq e^{-V(y_0)/T} = 1$. Par définition de $\gamma(x, y)$, l'élévation de $\gamma(x, y)$ est inférieure à l'élévation du chemin obtenu par concaténation de $\gamma(x, y_0)$ et $\gamma(y_0, y)$. D'où

$$\text{Elev}(\gamma(x, y)) \leq \sup(\text{Elev}(\gamma(x, y_0)), \text{Elev}(\gamma(y_0, y)))$$

et donc

$$\text{Elev}(\gamma(x, y)) - V(x) - V(y) \leq \sup(\text{Elev}(\gamma(x, y_0)) - V(x), \text{Elev}(\gamma(y_0, y)) - V(y)).$$

Ceci prouve que $L \leq C(V)$. L'inégalité $C(V) \leq L$ est évidente.

Nous allons maintenant déduire de ce résultat une minoration de $\rho(P_T)$. Soit $P_0 = \lim_{T \rightarrow 0} P_T$. Soit $N(x)$ le nombre de voisins de x . Alors, pour $x \neq y$,

$$P_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{N(x)} & \text{si } y \text{ est voisin de } x \text{ et } V(y) < V(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.3.14 *Les valeurs propres de P_0 sont positives ou nulles.*

DÉMONSTRATION :

Numérotions les éléments de M de sorte que $M = \{x_1, \dots, x_d\}$ et $V(x_1) \geq V(x_2) \geq \dots \geq V(x_d)$. La matrice P_0 est alors triangulaire supérieure. D'où le résultat.

Corollaire 3.3.15 *Il existe $T_0 > 0$ tel que, pour $T \leq T_0$*

$$\rho(P_T) \leq 1 - \frac{1}{d^3} \exp\left(-\frac{C(V)}{T}\right).$$

DÉMONSTRATION :

La matrice P_T étant une fonction continue de T , ses valeurs propres varient continûment avec T . D'où l'on déduit en combinant le lemme précédent avec la proposition 3.3.2 l'inégalité

$$\rho(P_T) \leq 1 - \frac{1}{d^3} \exp\left(-\frac{C(V)}{T}\right)$$

pour T assez petit.

Convergence du recuit simulé par paliers

Nous pouvons maintenant (comme promis dans la section 3.1.3) démontrer la convergence de l'algorithme du recuit simulé par paliers.

Pour $C > C(V)$, notons n_k la partie entière de e^{kC} . Soit $\{T(n)\}_{n \geq 0}$ le schéma de températures défini par $T(n) = 1/k$ pour $n_{k-1} < n \leq n_k$ et (X_n) le processus non homogène obtenu en simulant l'algorithme de Metropolis pour le schéma $\{T(n)\}$. D'après le théorème 3.3.3

$$|\mathbb{P}(X_{n_k} \in A | X_{n_{k-1}} = x) - \pi_{1/k}(A)| \leq \frac{4}{\pi_{1/k}(x)} \rho(1/k)^{\Delta_k}$$

avec $\Delta_k = 2(n_k - n_{k-1} - 1)$. D'après le lemme 3.1.6,

$$\frac{4}{\pi_{1/k}(x)} \leq \alpha \exp(k\beta)$$

pour des constantes $\alpha, \beta > 0$, et d'après le corollaire 3.3.15

$$\rho(1/k)^{\Delta_k} \leq (1 - d^{-3} e^{-kC(V)})^{\Delta_k} \leq \exp[-d^{-3} e^{-kC(V)} \Delta_k] \leq \exp[-\alpha_1 \exp(k(C - C(V)))]$$

pour une autre constante α_1 . D'où,

$$|\mathbb{P}(X_{n_k} \in A | X_{n_{k-1}} = x) - \pi_{1/k}(A)| \leq \alpha \exp(k\beta - \alpha_1 e^{k(C - C(V))}) = \eta_k.$$

En intégrant par rapport à la loi de $X_{n_{k-1}}$, on obtient

$$|\mathbb{P}(X_{n_k} \in A) - \pi_{1/k}(A)| \leq \eta_k.$$

Pour conclure, on utilise le fait que $\eta_k \rightarrow 0$ et $\pi_{1/k}(A) \rightarrow \frac{|A \cap V_{min}|}{|V_{min}|}$.

◇

Deuxième partie

Martingales et temps d'arrêt

Introduction

Nous abordons dans cette partie l'étude des *martingales à temps discret*. Les martingales sont une généralisation naturelle de la notion de "somme de variables indépendantes et centrées" dont la théorie s'est développée dans les années 40 et 50 sous l'influence de Joseph Doob⁶ (inspiré en partie par les travaux de Paul Lévy⁷).

Les résultats de la théorie constituent un jeu d'outils très puissants du calcul des probabilités. Le chapitre 4 introduit l'espérance conditionnelle et les martingales. On y démontre les principaux résultats de convergence des martingales et divers corollaires (loi des grands nombres, théorèmes ergodiques pour les chaînes de Markov). Le chapitre 5 propose quelques applications de la théorie des martingales aux processus de branchement et aux algorithmes d'approximation stochastiques. Le chapitre 6 a pour objet principal le théorème d'arrêt et ses applications, notamment à l'arrêt optimal. Enfin le chapitre 7 est une introduction à la finance des produits dérivés qui illustre le chapitre 6.

⁶Mathématicien américain né en 1910.

⁷Mathématicien français né en 1886 et mort en 1971. Polytechnicien et ingénieur des Mines, Paul Pierre Lévy fut professeur à l'École des Mines en 1913 puis professeur d'analyse à l'École Polytechnique de 1920 à 1953.

Chapitre 4

Martingales à temps discret

4.1 Espérance conditionnelle

La notion d'espérance conditionnelle joue un rôle fondamental dans tout ce chapitre. Avant de l'introduire nous commençons par rappeler quelques définitions et propriétés élémentaires des tribus (pour plus de détails, on pourra à ce sujet consulter la section 8.1 de l'appendice).

– Une *tribu* sur un ensemble Ω est une famille d'événements, qui contient l'espace tout entier Ω , qui est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

– Étant donnée une classe \mathcal{C} de parties de Ω , il existe une plus petite tribu qui contient \mathcal{C} , dite *tribu engendrée par \mathcal{C}* .

– Si $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire, la *tribu engendrée par T* , notée $\sigma(T)$, est la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ (tribu engendrée par \mathcal{C}) où \mathcal{C} est l'image réciproque des boréliens de \mathbb{R}^n par T . C'est encore la tribu $\sigma(\mathcal{C}')$ où \mathcal{C}' est l'image réciproque des pavés de \mathbb{R}^n par T . Les v.a. réelles mesurables par rapport à cette tribu sont de la forme $f(T)$ pour f borélienne (c'est-à-dire mesurable par rapport à la tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R}).

– Un espace *probabilisé* est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où \mathcal{F} est une tribu sur Ω et l'application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité.

– Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous définissons la classe \mathcal{N} des ensembles \mathbb{P} -négligeables,

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{P}(\Omega) : \text{il existe } A \in \mathcal{F}, A \supset N, \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

La relation qui identifie deux v.a. qui ne diffèrent que sur un élément de \mathcal{N} est une relation d'équivalence. Les éléments d'une classe d'équivalence sont dits *égaux presque sûrement*, en abrégé p.s.

Théorème 4.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} (v.a.r.) intégrable (resp. positive). Il existe une v.a. réelle Z , intégrable (resp. positive), unique à une équivalence près telle que*

(a) Z est \mathcal{B} -mesurable, et

(b)

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \int_A Z d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \quad (4.1)$$

ou encore, en utilisant le symbole espérance

$$\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A).$$

Cette v.a. Z s'appelle l'**espérance conditionnelle** de X sachant \mathcal{B} et se note $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

Dans le cas particulier où X^2 est intégrable, cette existence est particulièrement simple à établir. En effet, soit \mathbb{L}^2 l'espace des v.a.r. X telles que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Muni du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$$

et de la norme associée

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)},$$

\mathbb{L}^2 est un espace de Hilbert (voir, par exemple, la section 8.3.2 de l'appendice).

Soit $\mathbb{L}^2(\mathcal{B}) \subset \mathbb{L}^2$ le sous-espace constitué des v.a.r. \mathcal{B} -mesurables. D'après le *théorème des projections*¹

$$\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^2(\mathcal{B}) \oplus \mathbb{L}^2(\mathcal{B})^\perp$$

et tout élément $X \in \mathbb{L}^2$ s'écrit de façon unique

$$X = Z + (X - Z)$$

où Z est *projection orthogonale* de X sur $\mathbb{L}^2(\mathcal{B})$. Dit autrement, Z est l'élément de \mathbb{L}^2 caractérisé par

- (a) Z est \mathcal{B} -mesurable et ;
- (b) $(X - Z) \perp Y$, soit encore $E(XY) = E(ZY)$, pour tout $Y \in \mathbb{L}^2(\mathcal{B})$.

Ceci prouve non seulement l'existence de l'espérance conditionnelle pour des variables \mathbb{L}^2 mais permet aussi d'en donner une interprétation géométrique très concrète :

pour $X \in \mathbb{L}^2$, $Z = E(X|\mathcal{B})$ est la meilleure approximation de X au sens \mathbb{L}^2 par des v.a. de $\mathbb{L}^2(\mathcal{B})$. C'est donc l'unique élément de $\mathbb{L}^2(\mathcal{B})$ qui réalise l'égalité

$$\|X - Z\|_2 = \inf_{Y \in \mathbb{L}^2(\mathcal{B})} \|X - Y\|_2.$$

La preuve du théorème 4.1.1 dans le cas général se déduit de ce qui précède par des arguments standards que nous détaillons ci-dessous.

DÉMONSTRATION :

Si $X \in \mathbb{L}^2$, l'existence de $Z = E(X|\mathcal{B})$ provient de ce qui précède. Remarquons aussi que si $X \in \mathbb{L}^2$ est positive p.s., alors $Z \geq 0$ p.s. (il suffit de prendre $A = \mathbf{1}_{\{Z \leq 0\}}$ dans (4.1)).

Si X est seulement positive, la variable $X_n = \inf(X, n)$ est dans \mathbb{L}^2 . On peut donc définir $E(X_n|\mathcal{B})$. Comme $X_{n+1} - X_n \geq 0$,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{B}) - E(X_n|\mathcal{B}) = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{B}) \geq 0.$$

D'où l'on déduit l'existence de $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n|\mathcal{B})$. La variable Z est \mathcal{B} -mesurable positive p.s. comme limite de v.a. \mathcal{B} -mesurables positives p.s. Soit maintenant $A \in \mathcal{B}$. Par convergence monotone

$$E(Z\mathbf{1}_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(E(X_n|\mathcal{B})\mathbf{1}_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n\mathbf{1}_A) = E(X\mathbf{1}_A).$$

¹Si H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel **fermé** de H , alors H est somme directe de F et F^\perp . Ici $H = \mathbb{L}^2$ et $F = \mathbb{L}^2(\mathcal{B})$ est fermé car complet.

Ceci conclut la preuve de l'existence de $E(X|\mathcal{B})$ pour $X \geq 0$. Si X est dans \mathbb{L}^1 , on pose $X = X^+ - X^-$ avec $X^+ = \sup(X, 0)$. Comme $X^+ \in \mathbb{L}^1$, $E(X^+|\mathcal{B}) \in \mathbb{L}^1$ car, d'après (4.1), $E(X^+) = E(E(X^+|\mathcal{B}))$. Il en est de même pour $E(X^-|\mathcal{B})$. Il suffit alors de poser $E(X|\mathcal{B}) = E(X^+|\mathcal{B}) - E(X^-|\mathcal{B})$.

Il nous reste à prouver l'unicité de $Z = E(X|\mathcal{B})$. Supposons qu'il existe une autre variable Z' vérifiant les assertions (a) et (b) du théorème. Soit $A = \{Z \geq Z'\}$. Alors $A \in \mathcal{B}$ d'après (a) et $E((Z - Z')1_A) = 0$ d'après (b). D'où $Z \leq Z'$ p.s. et, par symétrie, $Z' \leq Z$ p.s.

4.1.1 Propriétés

Listons les propriétés importantes de l'espérance conditionnelle.

- (a) La relation (4.1) peut s'étendre aux v.a. bornées si X est intégrable ou positive sous la forme : pour toute v.a. Y \mathcal{B} -mesurable positive et bornée

$$E(YX) = E(YE(X|\mathcal{B})).$$

En particulier,

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad E(E(X|\mathcal{B})) = E(X).$$

Cette propriété montre que les v.a. Y \mathcal{B} -mesurables jouent pour l'espérance conditionnelle le même rôle que les constantes pour l'espérance.

- (b) Les principales propriétés de l'espérance conditionnelle sont pour la plupart des extensions des propriétés classiques de l'espérance. En particulier, l'opérateur qui à X associe la classe d'équivalence de la v.a. $E(X|\mathcal{B})$ est linéaire, positif, stable par limite croissante.
- (c) Le théorème de Lebesgue (théorème de convergence dominée 8.2.3) est encore valable pour les espérances conditionnelles, à savoir : si (X_n) est une suite de v.a. dominées par une v.a. intégrable ($|X_n| \leq Z \in \mathbb{L}^1$) qui converge p.s. vers X ($X_n \rightarrow X$ p.s.), alors

$$E(X_n|\mathcal{B}) \rightarrow E(X|\mathcal{B}) \text{ p.s.}$$

Exercice 4.1.2 Démontrer les propriétés (a), (b), (c) ci-dessus.

4.1.2 Exemples de calcul d'espérances conditionnelles

Conditionnement discret

a) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille finie (ou dénombrable) d'éléments de la tribu \mathcal{F} , telle que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$. Une telle famille s'appelle une *partition* finie (ou dénombrable) de Ω .

Soit \mathcal{B} la tribu engendrée par $(\Omega_i)_{i \in I}$. On pourra vérifier qu'un élément de \mathcal{B} est une réunion finie (ou dénombrable) de Ω_i . Alors, pour toute variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(X|\mathcal{B}) = \sum_{\{i \in I : P(\Omega_i) > 0\}} \frac{E(X\mathbf{1}_{\Omega_i})}{P(\Omega_i)} \mathbf{1}_{\Omega_i}. \quad (4.2)$$

En particulier,

$$E(\mathbf{1}_A|\mathcal{B}) = \sum_{\{i \in I : P(\Omega_i) > 0\}} P(A|\Omega_i) \mathbf{1}_{\Omega_i}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. Pour prouver (4.2), il faut montrer que $Z = \sum_{\{i \in I : P(\Omega_i) > 0\}} \frac{E(X\mathbf{1}_{\Omega_i})}{P(\Omega_i)} \mathbf{1}_{\Omega_i}$ vérifie les deux propriétés caractéristiques (a) et (b) du théorème 4.1.1. Il est clair que Z est \mathcal{B} -mesurable. Soit $A = \bigcup_{i \in J} \Omega_i$ un élément de \mathcal{B} . Alors $E(X\mathbf{1}_A) = E(\sum_{i \in J} X\mathbf{1}_{A \cap \Omega_i}) = \sum_{i \in J} E(\mathbf{1}_{\Omega_i} X) = E(Z\mathbf{1}_A)$.

b) Voici une application importante de la formule (4.2). Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini (ou dénombrable) de valeurs. Alors la variable $E(X|\sigma(Y))$ (que l'on note aussi souvent $E(X|Y)$) s'écrit

$$E(X|Y) = \Phi(Y)$$

avec

$$\Phi(y) = E(X|Y = y) = \frac{E(X\mathbf{1}_{Y=y})}{P(Y = y)}$$

pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) > 0$.

Conditionnement et indépendance

Le calcul d'une espérance conditionnelle est aisé lorsque les aléas du modèle sont indépendants. En particulier, soient U et V deux v.a. indépendantes, et $X = f(U, V)$

une fonction positive ou intégrable de ces deux v.a. On suppose que la v.a. observée est V , qui génère la tribu $\mathcal{B} = \sigma(V)$. Alors

$$E(X|\mathcal{B}) = \int_E f(u, V)\mu_U(du) = F(V)$$

où μ_U est la loi de U sur E , espace des valeurs prises par U .

Lois à densité

Cette propriété s'étend aisément au cas où les v.a. U et V ne sont plus indépendantes si leur loi admet une densité par rapport à une mesure de probabilité produit, $\mu_{U,V}(du, dv) = p(u, v)\alpha(du)\beta(dv)$. On a fait un changement de probabilité, par l'intermédiaire de la densité $p(u, v)$.

La **formule de Bayes** pour les espérances conditionnelles montre que

$$E(h(U, V)|\mathcal{B}) = \frac{\int h(u, V)p(u, V)\alpha(du)}{\int p(u, V)\alpha(du)}$$

pour toutes les valeurs de V pour lesquelles le dénominateur n'est pas nul. C'est un ensemble négligeable, sur lequel on peut définir l'espérance conditionnelle arbitrairement comme étant égale à 0.

4.2 Filtrations, processus et martingales

4.2.1 Processus aléatoires

Soit E un espace muni d'une tribu \mathcal{E} (typiquement E sera un ouvert de \mathbb{R}^m ou un ensemble dénombrable et \mathcal{E} la tribu borélienne associée). Un *processus aléatoire* à valeurs dans (E, \mathcal{E}) est un quadruplet

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et où, pour tout n , X_n est une v.a. à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . On notera souvent $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ étant sous-entendu.

On pose $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Un événement A appartient à \mathcal{F}_n^X si la seule donnée de X_0, X_1, \dots, X_n suffit à déterminer si A a eu lieu. Cependant, dans de nombreux cas, l'information disponible à l'instant n ne se résume pas aux seules valeurs de X_0, X_1, \dots, X_n (on peut très bien connaître aussi les valeurs prises par d'autres processus jusqu'à l'instant n). C'est pourquoi on introduit la notion suivante.

Définition 4.2.1 a) Une **filtration** est une suite croissante $\{\mathcal{F}_n\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F} : \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. La tribu \mathcal{F}_n s'appelle la tribu des événements antérieurs à n .
 b) On note \mathcal{F}_∞ la tribu $\sigma(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant toutes les tribus \mathcal{F}_n .
 c) Un processus X est dit **adapté** (à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$) si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, X_n est \mathcal{F}_n -mesurable. Il est dit **prévisible** si pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable (X_0 étant toujours supposée \mathcal{F}_0 -mesurable).
 d) La filtration (\mathcal{F}_n^X) s'appelle la **filtration naturelle** de X . C'est la plus petite filtration à laquelle X est adapté.

Lorsqu'on le rencontre pour la première fois, ce vocabulaire semble un peu barbare mais, à l'usage il se révèle fort utile.

Exemple 4.2.2 (Jeux de hasard). Pour en comprendre l'intuition, imaginons la situation suivante. À des instants discrets $n = 1, 2, \dots$ un "joueur" mise une certaine somme d'argent ϕ_n dans un "jeu de hasard" (casino, loto, investissement boursier). Le résultat du jeu à l'instant n est une "variable aléatoire" X_n (résultat d'un jet de dé, suite de numéros du loto, cours des actions) qui dépend d'événements plus ou moins complexes.

Le probabiliste ne cherche pas en général à décrire avec précision ces événements (essayez donc de décrire la mécanique du jet d'un dé ou celle déterminant le comportement de milliers d'actionnaires!) mais fait l'hypothèse qu'ils appartiennent à une tribu \mathcal{F}_n qu'il faut comprendre comme la tribu des événements antérieurs au temps n . Ainsi le processus X est adapté à $\{\mathcal{F}_n\}$.

La mise choisie par le joueur peut être le fruit d'une stratégie compliquée *mais* dans la mesure où le joueur ne connaît pas le résultat du jeu avant de l'avoir joué, le processus $\phi = \{\phi_n\}$ est nécessairement prévisible.

Exemple 4.2.3 (Chaînes de Markov). Soit $X = (X_n)$ une suite récurrente aléatoire

$$X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n), \quad n \geq 0$$

où (θ_n) sont des variables aléatoires i.i.d. de loi m à valeurs dans un espace Θ et f une fonction mesurable de $\Theta \times E$ dans E dénombrable. On suppose X_0 indépendante de la suite $(\theta_n)_{n \geq 0}$. Soit $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$. Alors X est adapté à la filtration $\{\mathcal{G}_n\}$, et aussi bien sûr à la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_n\}$, où $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

La propriété de Markov est vérifiée pour ces deux filtrations : pour toute fonction $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée, ou positive,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_{n+1})|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\Phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = P\Phi(X_n)$$

où P est la matrice de transition de la chaîne de Markov (X_n) . Lorsque l'espace d'état E n'est pas dénombrable, la même propriété est valable, mais P doit être vu comme le noyau fonctionnel de E dans E défini par $P\Phi(x) = \mathbb{E}(\Phi(\theta_n, x)) = \int_{\Theta} \Phi(\theta, x)m(d\theta)$.

4.2.2 Martingales à temps discret

Définition 4.2.4 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ et $X = (X_n)$ un processus réel (i.e. $E = \mathbb{R}$) adapté (à $\{\mathcal{F}_n\}$). Supposons X_n intégrable pour tout n ($\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$.)

- X est une **martingale** si $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ p.s.
- X est une **sous-martingale** si $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ p.s.
- X est une **sur-martingale** si $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ p.s.

Exemple 4.2.5 (Exemples de référence).

- (a) Soit Z une v.a. intégrable. La suite (X_n) , $X_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$, est une martingale.
- (b) Toute suite adaptée intégrable (A_n) croissante (décroissante) est une sous-martingale (sur-martingale).
- (c) Une martingale plus (moins) un processus croissant intégrable est une sous (sur)-martingale.

Remarque 4.2.6 Les hypothèses d'intégrabilité peuvent être un peu affaiblies dans le cas des SOUS-MARTINGALES : on autorise les intégrales à être éventuellement infinies, tout en excluant les formes indéterminées $= \infty - \infty$. Il suffit de supposer que

les v.a. (X_n) sont majorées p.s. par une suite de v.a. intégrables. Cela entraîne en particulier que les v.a. $X_n^+ = \sup(X_n, 0)$ sont intégrables.

Dans le cas des SUR-MARTINGALES, il suffit de supposer que les v.a. (X_n) sont minorées p.s. par une suite de v.a. intégrables. Cela entraîne en particulier que les v.a. $X_n^- = -\inf(X_n, 0)$ sont intégrables. Cette hypothèse est évidemment satisfaite pour les surmartingales positives.

Lorsque nous utiliserons cette notion, nous parlerons de sous (sur)-martingales généralisées.

Exemple 4.2.7 (Chaînes de Markov (ii)). Soit (X_n) une chaîne de Markov, de noyau de transition P défini sur E et f une fonction telle que $P^n f$ soit finie pour tout n .

- Si $f \geq Pf$, la fonction f est dite *surharmonique* et la suite $(f(X_n))$ est une surmartingale.
- Si $f = Pf$, la fonction est dite *harmonique*, et la suite $(f(X_n))$ est une martingale.
- Si $f \leq Pf$, la fonction est dite *sousharmonique*, et la suite $(f(X_n))$ est une sousmartingale. Nous reviendrons sur ces notions dans le chapitre 6.

4.2.3 Propriétés des martingales

Une autre manière de formuler la propriété de martingale est d'introduire la variation et la variation conditionnelle du processus entre deux périodes de temps.

Exemple 4.2.8 (Somme de variables indépendantes centrées).

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^Y$ et $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Par définition, $Y_n = \Delta X_n = X_n - X_{n-1}$.

Supposons les variables $\{Y_i\}$ indépendantes, dans \mathbb{L}^1 ($E(|Y_i|) < \infty$), et centrées ($E(Y_i) = 0$). Alors le processus (X_n) est une *martingale*.

L'indépendance n'est pas fondamentale : il suffit que la suite (Y_n) soit adaptée à la filtration considérée, intégrable, et vérifie

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Cette propriété est caractéristique des martingales, comme nous allons le voir dans le résultat plus général suivant.

Proposition 4.2.9 (Décomposition de Doob). *Soit (X_n) une suite de v.a.r. intégrables. La suite des variations sur une période est notée*

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}, n \geq 1$$

et leur projection sur la période précédente

$$\Delta I_n = E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}), n \geq 1.$$

(i) (X_n) admet une décomposition de la forme

$$X_n = X_0 + M_n + I_n.$$

où $I_n = \sum_{k=1}^n \Delta I_k$ est un processus prévisible, intégrable, nul en 0, et (M_n) est une martingale.

(ii) Cette décomposition en martingale et processus prévisible est unique.

(iii) X est une sous-martingale si et seulement si le processus prévisible (I_n) est un processus croissant.

(iv) X est une sur-martingale si et seulement si le processus prévisible I_n est un processus décroissant négatif. En général, on le note $(-A_n)$.

(v) X est une martingale si et seulement si le processus prévisible (I_n) est nul.

DÉMONSTRATION :

La décomposition est évidente.

⇒ Pour montrer les propriétés d'intégrabilité, il suffit de remarquer que ΔI_n , qui par construction est l'espérance conditionnelle d'une v.a. intégrable, est intégrable. Les autres propriétés suivent immédiatement.

⇒ Pour montrer l'unicité, supposons que N_n est une martingale et V_n un processus prévisible intégrable tels que

$$X_n = X_0 + M_n + I_n = X_0 + N_n + V_n.$$

La martingale $(M_n - N_n)$ est donc égale au processus prévisible $V_n - I_n$. La v.a. $M_n - N_n$ est donc \mathcal{F}_{n-1} -mesurable. La propriété de martingale implique que p.s.

$$M_n - N_n = M_{n-1} - N_{n-1} = M_0 - N_0 = 0$$

. L'égalité des martingales M_n et N_n en résulte, ainsi que celle des processus I_n et V_n .

Remarque 4.2.10 Les techniques de décomposition ne peuvent en général pas s'appliquer aux sur-(sous) martingales généralisées, car les différences Y_n et ΔI_n peuvent ne pas être définies.

Proposition 4.2.11 (Convexité et martingale). *Si X est une martingale (respectivement une sous-martingale) et Φ une fonction convexe (respectivement une fonction convexe croissante) sur \mathbb{R} telle que $\mathbf{E}(|\Phi(X_n)|) < +\infty$ pour tout n , alors $\Phi(X)$ est une sous-martingale.*

DÉMONSTRATION :

Par l'inégalité de Jensen conditionnelle, $\mathbf{E}(\Phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \Phi(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))$. Si X est une martingale $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ et $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \Phi(X_n)$.

Si X est une sous-martingale et Φ convexe croissante, $\Phi(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \geq \Phi(X_n)$.

L'analogie entre les sommes de v.a. indépendantes et centrées se retrouve dans l'étude des propriétés quadratiques des martingales.

Proposition 4.2.12 (Propriétés quadratiques). *Soit (X_n) une martingale de carré intégrable. La sous-martingale (X_n^2) admet une décomposition de la forme,*

$$X_n^2 = X_0^2 + N_n + [X]_n$$

où $N_n = 2 \sum_{i=1}^n X_{i-1} \Delta X_i$ est une martingale nulle en 0, et $[X]_n = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})^2$ est un processus croissant **adapté** intégrable, appelé **variation quadratique** de la martingale X .

Cette décomposition diffère de la décomposition prévisible de Doob

$$X_n^2 = X_0^2 + M_n + \langle X \rangle_n$$

$$\text{où } \Delta \langle X \rangle_n = \mathbf{E}((X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1})$$

$$\text{et } \Delta M_n = \Delta N_n + (\Delta X_n)^2 - \mathbf{E}((\Delta X_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}).$$

DÉMONSTRATION :

La première décomposition est une simple conséquence de l'identité

$$X_n^2 - X_{n-1}^2 = (X_n - X_{n-1})^2 + 2X_{n-1}(X_n - X_{n-1}).$$

Comme $X_n \in \mathbb{L}^2$, $X_{n-1}(X_n - X_{n-1}) \in \mathbb{L}^1$ et les propriétés d'intégrabilité sont satisfaites. Puisque $X_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$, la propriété de martingale de (X_n) entraîne celle de $\Delta N_n = X_{n-1}(X_n - X_{n-1})$.

\Rightarrow Pour obtenir la décomposition de Doob, il faut mettre en évidence le processus prévisible $\langle X \rangle$, défini par ses accroissements $\Delta \langle X \rangle_n = \mathbf{E}((X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1})$. La différence $([X]_n - \langle X \rangle_n)$ est alors clairement une martingale.

4.3 Convergence des martingales de carré intégrable

Au vu de l'exemple 4.2.8, les sommes partielles de variables indépendantes centrées sont des martingales. Il est donc assez raisonnable de penser que les résultats classiques concernant de telles sommes se généralisent aux martingales. Un très joli résultat, démontré par Kolmogorov dans les années 30 (et connu sous le nom du théorème des trois séries) affirme (en outre) qu'une somme partielle de variables indépendantes et centrées converge presque sûrement dès lors que sa variance est bornée. Nous allons démontrer ici un énoncé analogue pour les martingales. Ce premier résultat de convergence (on en verra d'autres) est simple à obtenir et riche d'applications.

4.3.1 Inégalité de Doob

Théorème 4.3.1 (Doob). *Soit X une sous-martingale positive, par exemple le module d'une martingale de carré intégrable. Alors*

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{0 \leq j \leq N} X_j \right)^2 \right) \leq 4\mathbb{E}(X_N^2).$$

DÉMONSTRATION :

a) Introduisons le processus croissant $S_n = \sup_{0 \leq j \leq n} X_j$ pour $n \geq 0$ et $S_{-1} = 0$.

La différence $S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n)$ est majorée par $2X_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ car si $S_{n+1} > S_n$, $S_{n+1} = X_{n+1} > S_n \geq 0$. Ceci est aussi vrai pour l'indice -1 . Prenons l'espérance et appliquons l'inégalité des sous-martingales entre $n+1$ et N . Il vient que

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - S_n^2) \leq 2\mathbb{E}(X_{n+1}(S_{n+1} - S_n)) \leq 2\mathbb{E}(X_N(S_{n+1} - S_n)). \quad (4.3)$$

La seconde inégalité s'obtient en remarquant que

$$\mathbb{E}((X_N - X_{n+1})(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_{n+1}) = (S_{n+1} - S_n)\mathbb{E}((X_N - X_{n+1}) | \mathcal{F}_{n+1}) \geq 0.$$

En sommant sur les indices n entre -1 et $N-1$, nous obtenons que $\mathbb{E}(S_N^2) \leq 2\mathbb{E}(X_N S_N)$.

Si $\mathbb{E}(S_N^2) < +\infty$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Schwarz et déduire que

$$\mathbb{E}(S_N^2) \leq 2\mathbb{E}(X_N^2)^{1/2} \mathbb{E}(S_N^2)^{1/2}$$

ce qui conduit à l'inégalité recherchée.

b) Si nous ne savons pas a priori que $\mathbb{E}(S_N^2) < +\infty$, nous utilisons le même argument

que ci-dessus pour étudier le processus $S_n^K = \inf(S_n, K)$. La majoration (4.3) est valable, car sur $S_{n+1}^K > S_n^K$, nécessairement $S_{n+1} > S_n$. On en déduit que

$$\mathbb{E}((S_N^K)^2) \leq 4\mathbb{E}(X_N^2).$$

D'où l'inégalité dans le cas général par passage à la limite croissante en K .

L'inégalité précédente admet de nombreuses extensions fort utiles, que nous proposons en exercice.

Exercice 4.3.2 Soit G une fonction convexe croissante, de dérivée à droite g .

On note $S_n = X_n^* = \sup_{0 \leq k \leq n} X_k$.

a) Montrer que si (X_n) est une sous-martingale,

$$H_n = G(X_n^*) - (X_n^* - X_n)g(X_n^*)$$

est une sous-martingale.

Pour établir cette propriété, on remarquera que

$$(X_{n+1}^* - X_{n+1})g(X_{n+1}^*) = (X_{n+1}^* - X_{n+1})g(X_n^*).$$

On en déduira que la différence $H_{n+1} - H_n$ est plus grande que $g(X_n^*)(X_{n+1} - X_n)$.

b) En déduire que si (X_n) est une sous-martingale nulle en 0, pour tout $p > 1$,

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{0 \leq j \leq N} X_j \right)^p \right) \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E} \left(X_N \left(\sup_{0 \leq j \leq N} X_j \right)^{p-1} \right).$$

Puis en déduire (en utilisant l'inégalité de Hölder) qu'il existe une constante universelle C_p telle que pour tout $p > 1$

$$\mathbb{E} \left(\left(\sup_{0 \leq j \leq N} X_j \right)^p \right) \leq C_p \mathbb{E}(X_N^p). \tag{4.4}$$

d) En utilisant la fonction $G(x) = (x - K)^+$, montrer que si (X_n) est une sous-martingale positive

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq j \leq N} X_j \geq K \right) \leq K^{-1} \mathbb{E}(X_N).$$

4.3.2 Convergence des martingales dans \mathbb{L}^2

Nous donnerons dans la section 4.4 de ce chapitre les hypothèses les plus faibles sous lesquelles la propriété de convergence est vraie. Pour le moment, nous étudions le cas des martingales de carré intégrable.

Théorème 4.3.3 *Soit $M = (M_n)$ une martingale bornée dans \mathbb{L}^2 , c'est-à-dire telle que*

$$\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}((M_i - M_{i-1})^2) < \infty,$$

alors (M_n) converge presque sûrement et dans \mathbb{L}^2 vers une v.a. M_∞ .

DÉMONSTRATION :

a) Posons $\alpha = \sup_n \mathbb{E}(M_n^2)$. Comme la suite $\mathbb{E}(M_n^2)$ est croissante, elle converge vers α et $\mathbb{E}((M_{n+p} - M_n)^2) \leq \alpha - \mathbb{E}(M_n^2) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Puisque le majorant ne dépend pas de p , $\sup_p \mathbb{E}((M_{n+p} - M_n)^2) \rightarrow 0$. La suite (M_n) est donc une suite de Cauchy dans \mathbb{L}^2 , qui converge donc dans \mathbb{L}^2 (car \mathbb{L}^2 est complet) vers une v.a. M_∞ .

b) Montrons qu'elle converge p.s.

En posant $V_n = \sup_{i,j \geq n} |M_i - M_j|$, on construit une suite décroissante, qui converge p.s. vers V . D'après l'inégalité de Doob (théorème 4.3.1) appliquée à la $\{\mathcal{F}_{n+k}\}_{k \geq 0}$ -martingale $(M_{n+k} - M_n)$,

$$\mathbb{E}(V_n^2) \leq 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{n \leq k \leq N} |M_k - M_n|^2 \right) \leq 8 \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|M_N - M_n|^2) = 8 \mathbb{E}(|M_\infty - M_n|^2).$$

Si n tend aussi vers ∞ , ce dernier terme tend vers 0. La suite (M_n) est donc une suite de Cauchy pour la convergence p.s. Elle converge donc p.s. et sa limite p.s. est nécessairement M_∞ car de la convergence dans \mathbb{L}^2 de (M_n) on peut déduire (voir le théorème 8.5.6 de l'appendice) l'existence d'une sous-suite (M_{n_k}) qui converge p.s. vers M_∞ .

Remarque 4.3.4 La même preuve montre la convergence dans \mathbb{L}^p ($p > 1$), si on tient compte de l'inégalité (4.4) pour une martingale bornée dans \mathbb{L}^p .

Exemple 4.3.5 (Urne de Polya). Une urne contient N boules de couleurs $1, 2, \dots, m$. À chaque instant $n = 1, 2, \dots$ on tire une boule au hasard dans l'urne puis on la remet en ajoutant une boule de même couleur. Soit N_n^i le nombre de boules de

couleur i à l'instant n , X_n^i la proportion de boules de couleur i (i.e. $X_n^i = \frac{N_n^i}{N+n}$) et $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^m)$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Par construction

$$E(N_{n+1}^i - N_n^i | \mathcal{F}_n) = X_n^i,$$

d'où

$$E(X_{n+1}^i - X_n^i | \mathcal{F}_n) = 0.$$

La suite (X_n^i) est une martingale bornée donc (théorème 4.3.3) presque sûrement convergente. Nous reviendrons sur ce modèle dans la section 5.2 du chapitre 5.

4.3.3 Loi des grands nombres

Une conséquence facile du théorème 4.3.3 est la "loi forte" des grands nombres dont nous donnons plusieurs versions. Le lemme de Kronecker sur le comportement des moyennes de Césaro des suites réelles déterministes convergentes nous sera très utile.

Lemme 4.3.6 (Kronecker). *Soit (y_n) une suite de nombres réels.*

Si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{n}$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 0$.

Le même résultat est valable si $\frac{1}{n}$ est remplacé par $\frac{1}{a_n}$ où (a_n) est une suite croissante qui tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION :

Soit $s_n = \sum_{i=1}^n y_i/i$, $s_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n y_i$. Alors

$$S_n/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i(s_i - s_{i-1}) = \frac{1}{n} (ns_n - \sum_{i=1}^n s_i).$$

Ce dernier terme converge vers 0 puisque s_n converge.

Il existe plusieurs énoncés, plus ou moins forts, de la loi des grands nombres. Nous commençons par celui qui s'énonce le plus simplement.

Théorème 4.3.7 *Soit (M_n) une martingale, $Y_n = M_n - M_{n-1}$, $n \geq 1$. Supposons*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} E(Y_n^2) < \infty.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = 0$$

p.s. et dans \mathbb{L}^2 .

DÉMONSTRATION :

Soit $W_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} Y_i$. Alors (W_n) est une martingale et

$$\mathbb{E}(W_n^2) = \sum_{n \geq k \geq 1} \frac{1}{k^2} \mathbb{E}(Y_k^2) < \infty.$$

Ainsi, (théorème 4.3.3) (W_n) converge *p.s.* et dans \mathbb{L}^2 . Pour conclure, on utilise le lemme de Kronecker.

Corollaire 4.3.8 (La loi forte des grands nombres). *Soient X_1, \dots, X_n des variables intégrables ($\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$) i.i.d., de moyenne $\mathbb{E}(X_i) = m$. Alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow m, \text{ p.s.}$$

DÉMONSTRATION :

En remplaçant X_n par $X_n - m$, on peut toujours supposer les variables centrées.

⇒ Observons pour commencer que

$$\sum_{n > 0} \mathbf{1}_{\{\alpha \leq n\}} \leq \int_{\sup(\alpha, 1)}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\sup(\alpha, 1)}.$$

Introduisons les v.a. tronquées $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n\}}$. Posons $X = X_1$. Il est clair que

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}\right)$$

converge vers $0 = \mathbb{E}(X)$, et que la suite Y_n/n est bornée dans \mathbb{L}^2 , car

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} &\leq \sum_n \mathbb{E}\left(\frac{X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}}{n^2}\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_n \mathbf{1}_{\{\sup(\|X\|, 1) \leq n\}} \frac{X^2}{n^2}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{\sup(\|X\|, 1)}\right) \leq \mathbb{E}(|X|). \end{aligned}$$

⇒ Il reste à montrer que les suites (X_n) et (Y_n) diffèrent peu quand $n \rightarrow \infty$. Mais

$$\begin{aligned} \sum_n \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) &= \sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = \sum_n \mathbb{P}(|X| \geq n) \\ &\leq \mathbb{E}(|X|) + 1 < +\infty \end{aligned}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli (théorème 8.1.19 de l'appendice), l'événement

$$\{\omega \text{ tel que pour tout } n, \text{ il existe } p > 0 \text{ tel que } X_{n+p}(\omega) = Y_{n+p}(\omega)\}$$

est de probabilité nulle. Les suites (X_n) et (Y_n) coïncident à partir d'un certain rang p.s. Leurs moyennes arithmétiques ont donc la même limite.

On peut raffiner ces résultats en utilisant la variation quadratique prévisible $\langle M \rangle$ de la décomposition de la sous-martingale M^2 .

Théorème 4.3.9 *Soit M une martingale de carré intégrable, alors*

- (i) *sur $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$, $\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0$ p.s. ;*
- (ii) *sur $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$, M_n converge p.s.*

DÉMONSTRATION :

Introduisons la suite Z_n de v.a. intégrables, définies par

$$\Delta Z_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{1 + \langle M \rangle_n}.$$

Puisque $\langle M \rangle_n$ est prévisible, ΔZ_n est centrée en espérance conditionnelle. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\Delta Z_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= \frac{1}{(1 + \langle M \rangle_n)^2} \mathbb{E}((\Delta M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \frac{\Delta \langle M \rangle_n}{(1 + \langle M \rangle_n)^2} \leq \int_{\langle M \rangle_{n-1}}^{\langle M \rangle_n} \frac{1}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathbb{E}(Z_n^2) \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1.$$

La martingale Z_n qui est bornée dans \mathbb{L}^2 converge donc p.s. et dans \mathbb{L}^2 .

⇒ D'après le lemme de Kronecker, sur l'ensemble où $1 + \langle M \rangle_n$ tend vers l'infini, $M_n/(1 + \langle M \rangle_n)$ et donc $M_n/\langle M \rangle_n$ convergent vers 0.

⇒ Dans le cas où $\langle M \rangle_n$ converge p.s. vers une limite finie, pour presque tout ω , la série de terme général $\Delta Z_n(\omega)$ et la série de terme général $\Delta M_n(\omega)$ ont le même ensemble de convergence. Par suite, la série de terme général $\Delta M_n(\omega)$ converge.

4.4 Convergence : le cas général

Toute suite réelle croissante bornée est convergente. Ce résultat élémentaire (mais important) d'analyse réelle admet une version stochastique due à Doob : *toute sous-martingale bornée dans \mathbb{L}^1 est presque sûrement convergente.*

Théorème 4.4.1 (Doob). *i) Soit (X_n) une sur-martingale positive. Alors (X_n) converge p.s. vers une v.a. X_∞ intégrable.*

ii) Soit (X_n) une sous-martingale telle que $\sup_n \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$. Alors il existe une v.a.r. $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ telle que $X_n \rightarrow X_\infty$ p.s.

Pour prouver ce résultat nous allons utiliser les deux lemmes suivants. Nous nous inspirons de Neveu [23].

Lemme 4.4.2 *Soit (X_n) une sur-martingale positive et bornée par K . La martingale de la décomposition de Doob est uniformément de carré intégrable*

$$\mathbf{E}(M_n^2) \leq 2K\mathbf{E}(X_0).$$

DÉMONSTRATION :

Rappelons que $M_n = X_n + A_n$, où A est un processus croissant prévisible tel que $\Delta A_n = A_n - A_{n-1} = -\mathbf{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1})$. Par construction, X_n , ΔA_n et donc M_n sont de carré intégrable. En particulier, $\mathbf{E}(M_n^2) = \mathbf{E}(X_0^2) + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}((M_i - M_{i-1})^2)$.

L'observation essentielle qui permet de montrer que (M_n) est une suite bornée dans \mathbb{L}^2 est la suivante :

$$\mathbf{E}(\Delta M_i^2) = \mathbf{E}\left((\Delta X_i - \mathbf{E}(\Delta X_i | \mathcal{F}_{i-1}))^2\right) = \text{Var}(\Delta X_i | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \mathbf{E}(\Delta X_i^2)$$

compte tenu des propriétés de la variance conditionnelle.

Observons que

$$(\Delta X_i)^2 = X_i^2 - X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}(X_i - X_{i-1})$$

et que

$$\mathbf{E}((\Delta X_i)^2) = \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(X_{i-1}^2) + 2\mathbf{E}(X_{i-1}(A_i - A_{i-1})).$$

Par sommation, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_n^2) &\leq \mathbf{E}(X_n^2) + 2 \sum_{0 < i \leq n} \mathbf{E}\left(X_{i-1}(A_i - A_{i-1})\right) \\ &\leq \mathbf{E}(X_n^2) + 2K\mathbf{E}(A_n) \\ &= \mathbf{E}(X_n^2 - 2KX_n) + 2K\mathbf{E}(X_n + A_n) \\ &\leq 2K\mathbf{E}(X_0). \end{aligned}$$

La dernière inégalité utilise la propriété de martingale de $X_n + A_n$.

Lemme 4.4.3 *Soit (X_n) une sous-martingale telle que $\sup_n \mathbf{E}(X_n^+) = K < +\infty$. Alors $X_n = Y_n - Z_n$, où (Y_n) est une martingale positive et (Z_n) est une sur-martingale positive.*

DÉMONSTRATION :

D'après la proposition (4.2.11), (X_n^+) est une sous-martingale de décomposition de Doob $X_n^+ = X_0^+ + M_n + I_n$, où I_n est un processus croissant, positif, prévisible et intégrable.

$E(I_n) \leq E(|X_0|) + E(X_n^+) \leq E(|X_0|) + K$. La v.a. limite I_∞ est donc aussi intégrable. Introduisons la martingale $Y_n = X_0^+ + M_n + E(I_\infty | \mathcal{F}_n) \geq X_0^+ + M_n + I_n = X_n^+$ positive. Alors $Z_n = Y_n - X_n$ est une sur-martingale (comme différence d'une martingale et d'une sous-martingale) positive (car $Y_n \geq X_n^+ \geq X_n$), d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 4.4.1

DÉMONSTRATION :

Supposons pour commencer la sur-martingale (X_n) positive, bornée par K . D'après le lemme 4.4.2, elle admet une décomposition en $X_n = M_n - A_n$, où la martingale est bornée dans \mathbb{L}^2 . La martingale converge donc p.s. vers une limite finie, et comme la suite (X_n) est bornée il en est de même du processus croissant (A_n) . La suite (X_n) elle-même converge donc p.s. Par changement de signe, il en est de même pour les sous-martingales bornées.

\Rightarrow Considérons maintenant une sur-martingale positive (Z_n) . La suite de terme général $X_n = e^{-Z_n}$ est une sous-martingale positive comprise entre 0 et 1. Elle converge donc p.s., de même que la suite (Z_n) à condition d'admettre $+\infty$ comme limite. Mais $E(Z_\infty) = E(\liminf_n Z_n) \leq \limsup_n E(X_n) \leq E(X_0)$. La limite est intégrable et donc finie p.s.

\Rightarrow Pour revenir aux sous-martingales vérifiant la condition $\sup_n E(X_n^+) < \infty$, on utilise le lemme 4.4.3, qui permet de décomposer la sous-martingale comme différence d'une martingale positive et d'une sur-martingale positive. Ces deux suites convergent donc p.s. vers des limites finies p.s. et intégrables.

Remarque 4.4.4 (i) Le théorème 4.3.3 se déduit directement du théorème 4.4.1.

En effet, si (M_n) est une martingale bornée dans \mathbb{L}^2 alors (M_n) est une sous-martingale et $\sup_n E(|M_n|) \leq \sup_n E(M_n^2)^{1/2} < \infty$.

(ii) (**Attention !**) Bien que la limite d'une sous-martingale bornée dans \mathbb{L}^1 soit une variable \mathbb{L}^1 , la convergence n'a pas (toujours) lieu dans \mathbb{L}^1 . Voici un contre exemple assez surprenant (extrait du contrôle classant 2003).

Dans la modélisation du prix d'un titre financier, on traduit les variations relatives du prix du titre entre deux dates par l'intermédiaire d'une suite de v.a. Z_i indépendantes, prenant les valeurs 1 et -1 avec les probabilités p et $1-p$.

Soit u un nombre strictement plus grand que 1. Le prix d'une action à la date

$n + 1$ est modélisé par

$$X_{n+1} = X_n u^{Z_{n+1}}, \quad X_0 = x$$

c'est-à-dire que si $Z_{n+1} = 1$, il y a hausse et $X_{n+1} = X_n u$. Dans le cas contraire, il y a baisse et $X_{n+1} = X_n u^{-1}$.

Supposons $p = \frac{1}{1+u}$ de telle sorte que $E(u^{Z_{n+1}}) = 1$.

Alors, $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n E(u^{Z_{n+1}}) = X_n$ où \mathcal{F}_n désigne la tribu engendrée par Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Ainsi (X_n) est une martingale, et donc,

$$E(X_n) = E(X_0) = x.$$

Par ailleurs, par la loi forte des grands nombres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = E(Z_1) = 2p - 1 = \frac{1-u}{1+u} < 0,$$

d'où

$$\left(\frac{X_n}{x} \right)^{1/n} \rightarrow u^{(2p-1)} < 1 \text{ p.s.}$$

Ainsi le cours de l'action tend presque sûrement vers 0, alors qu'en espérance il ne varie pas!

Un autre exemple est celui de la martingale remarquable associée à un processus de branchement, étudiée dans le chapitre 5.

Pour obtenir la convergence dans \mathbb{L}^1 , il faut renforcer l'hypothèse d'intégrabilité.

Soit $M = (M_n)$ une martingale. Nous dirons que M est une martingale *uniformément intégrable* (U.I) si la famille (M_n) est *uniformément intégrable*, c'est-à-dire, si

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \sup_n \int_{|M_n| > c} |M_n| dP \right\} = 0.$$

Soit, encore

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n E(|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > c\}}) = 0.$$

Théorème 4.4.5 (Doob). *Soit M une martingale uniformément intégrable. Alors*

- (i) M_n converge p.s. et dans \mathbb{L}^1 vers une v.a. M_∞ ;
- (ii) $M_n = E(M_\infty | \mathcal{F}_n)$.

DÉMONSTRATION :

L'assertion (i) est une conséquence du théorème 4.4.1 et de l'uniforme intégrabilité. En effet, rappelons qu'une suite U.I est bornée dans \mathbb{L}^1 et que toute suite U.I qui converge en probabilité converge dans \mathbb{L}^1 (voir la proposition 8.5.9 et le théorème 8.5.10 de l'appendice).

(ii) Soit $F \in \mathcal{F}_n$ et $m \geq n$. Alors $E(M_m | \mathcal{F}_n) = M_n$ d'où $E(M_m \mathbf{1}_F) = E(M_n \mathbf{1}_F)$. Par ailleurs

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} E(|(M_m - M_\infty) \mathbf{1}_F|) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E(|M_m - M_\infty|) = 0.$$

D'où

$$E(M_\infty \mathbf{1}_F) = \lim_{m \rightarrow \infty} E(M_m \mathbf{1}_F) = E(M_n \mathbf{1}_F).$$

Corollaire 4.4.6 Soit $Y \in \mathbb{L}^1$. Alors la suite $X_n = E(Y | \mathcal{F}_n)$ converge p.s. et dans \mathbb{L}^1 vers $X_\infty = E(Y | \mathcal{F}_\infty)$.

DÉMONSTRATION :

La suite (X_n) est une martingale. Vérifions qu'elle est uniformément intégrable.

$$\begin{aligned} E(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) &\leq E(E(|Y| | \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) = E(|Y| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) \\ &= E(|Y| \mathbf{1}_{|Y| > \sqrt{c}} \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) + E(|Y| \mathbf{1}_{|Y| \leq \sqrt{c}} \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) \\ &\leq E(|Y| \mathbf{1}_{|Y| > \sqrt{c}}) + \sqrt{c} P(|X_n| \geq c) \leq E(|Y| \mathbf{1}_{|Y| > \sqrt{c}}) + \frac{1}{\sqrt{c}} E(|Y|). \end{aligned}$$

Chacun des termes de cette inégalité tend vers zéro quand $c \rightarrow \infty$, le premier par convergence dominée, et le second trivialement. Ceci prouve bien que (X_n) est U.I. Elle converge donc, en vertu du théorème 4.4.5, presque sûrement et dans \mathbb{L}^1 vers X_∞ .

Il reste à vérifier que $X_\infty = E(Y | \mathcal{F}_\infty)$.

Supposons dans un premier temps que Y (et donc aussi X_∞) est une v.a. positive. Soient μ et ν les mesures définies par $\mu(B) = E(X_\infty \mathbf{1}_B)$ et $\nu(B) = E(Y \mathbf{1}_B)$ pour $B \in \mathcal{E}$. Pour tout $B \in \mathcal{F}_n$,

$$E(Y \mathbf{1}_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(E(Y | \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n \mathbf{1}_B) = E(X_\infty \mathbf{1}_B).$$

Ainsi μ et ν coïncident sur l'ensemble $C = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$. Comme C est stable par intersection, le théorème d'unicité des mesures (théorème 8.1.22 de l'appendice) nous apprend qu'elles coïncident sur la tribu $\sigma(C) = \mathcal{F}_\infty$. Ce qui prouve donc que $X_\infty = E(Y | \mathcal{F}_\infty)$. Dans le cas où Y est de signe quelconque, il suffit de poser $Y = Y^+ - Y^-$ avec $Y^+ = \sup(0, Y)$ et $Y^- = \sup(0, -Y)$ et d'appliquer le résultat démontré pour des v.a. positives.

4.4.1 Loi du zéro-un

Une conséquence amusante de ce dernier résultat est la *loi du zéro-un* de Kolmogorov. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et

$$\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots).$$

La *tribu de queue* ou *tribu asymptotique* de (X_n) est la tribu

$$\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_n.$$

Les éléments de \mathcal{T} sont les événements qui ne dépendent que de l'asymptotique de (X_n) . En voici quelques exemples :

- (a) $\{\limsup_n X_n = \liminf_n X_n\} = \{(X_n) \text{ converge}\}$.
- (b) $\{\sum_n X_n \text{ converge}\}$.
- (c) $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \text{ existe}\}$.

Corollaire 4.4.7 (Loi du zéro-un). *Soit (X_n) une suite de variables indépendantes et \mathcal{T} sa tribu de queue. Alors, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.*

DÉMONSTRATION :

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. D'après le corollaire 4.4.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_\infty) = \mathbf{1}_A,$$

et

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(A)$$

car A est indépendante de \mathcal{F}_n .

4.4.2 Théorème ergodique pour les chaînes de Markov

Un peu de topologie Soit M un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^d , ou plus généralement un espace polonais (*i.e.* un espace métrique complet séparable). Soit $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des probabilités sur M . Rappelons (voir l'appendice) qu'une suite (μ_n) d'éléments de $\mathcal{P}(M)$ converge étroitement (ou *en loi*) vers $\mu \in \mathcal{P}(M)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f(x) \mu_n(dx) = \int_M f(x) \mu(dx)$$

pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

Muni de la topologie de la convergence étroite, l'espace $\mathcal{P}(M)$ est lui-même un espace polonais (voir Billingsley [14]); mais surtout il existe un critère simple de compacité : le théorème de Prohorov.

Définition 4.4.8 Une suite (μ_n) d'éléments de $\mathcal{P}(M)$ est dite

(a) **tendue**, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset M$ tel que

$$\mu_n(K) \geq 1 - \epsilon$$

pour tout $n \geq 0$;

(b) **relativement compacte**, si tout sous-suite (μ_{n_k}) admet une sous suite $(\mu_{n_{k_i}})$ qui converge étroitement.

Théorème 4.4.9 (Prohorov). Une suite (μ_n) d'éléments de $\mathcal{P}(M)$ est tendue si et seulement si elle est relativement compacte. En particulier, l'espace $\mathcal{P}(M)$ est compact si M est compact.

Application aux chaînes de Markov Soit P un noyau markovien sur M . Le noyau P est dit *fellérien* si Pf est continue, bornée pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

Théorème 4.4.10 Soit (X_n) une chaîne de Markov sur M de noyau P fellérien. On suppose que la mesure d'occupation de (X_n)

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$$

est tendue p.s. Alors, avec probabilité un, chaque point limite de (ν_n) est une probabilité invariante pour P .

DÉMONSTRATION :

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Posons $U_{n+1} = f(X_{n+1}) - Pf(X_n)$ et $M_n = \sum_{k=0}^n U_k$. Alors (M_n) est une martingale (pour la filtration \mathcal{F}^X) et par application du théorème 4.3.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M_n = 0 \quad \text{p.s.}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M f d\nu_n - \int_M (Pf) d\nu_n \right) = 0.$$

En particulier, pour chaque point limite ν de ν_n ,

$$\int_M f d\nu = \int_M Pf d\nu = \int_M f d(\nu P).$$

Deux mesures qui coïncident sur les fonctions continues bornées sont égales par application du théorème d'unicité de l'appendice. En effet, on applique cette dernière égalité à la fonction continue bornée $f_\epsilon(x) = [1 - \frac{d(x, F)}{\epsilon}]^+$ où F est un fermé de M . Comme f_ϵ converge simplement, pour $\epsilon \rightarrow 0$, vers $\mathbf{1}_F$, on en déduit (par convergence dominée) que $\nu(F) = (\nu P)(F)$ pour tout fermé $F \subset M$. D'où $\nu = \nu P$ par application du théorème d'unicité 8.1.22 de l'appendice.

Corollaire 4.4.11 *Si M est compact et P est fellerien, l'ensemble des probabilités invariantes de P est non vide.*

Une autre conséquence du théorème 4.4.10 est le théorème ergodique suivant d'où se déduisent, en particulier, les propositions 1.4.3 et 1.5.3 du chapitre 1.

Corollaire 4.4.12 *Si M est compact, P fellerien et si de plus P admet au plus une probabilité invariante π , alors (ν_n) converge presque sûrement vers π .*

◇

...Pour en savoir plus...

4.5 Inégalités et convergences : les preuves classiques

L'objet de cette section, plus technique, est de présenter la preuve classique du théorème de convergence pour les martingales (théorème 4.4.1). Cette preuve utilise le résultat simple, qui sera montré dans le chapitre suivant, qu'une (sous)-martingale arrêtée au premier temps de passage au-dessus (ou au-dessous) d'un seuil est encore une (sous)-martingale.

4.5.1 Inégalités maximales

Nous commençons par une démonstration de l'inégalité maximale (voir exercice 4.3.2) qui utilise les temps d'arrêt.

Théorème 4.5.1 (Doob-Kolmogorov). *Soit X une sous-martingale positive. Alors*

(i) pour $\alpha > 0$

$$P\left(\sup_{0 \leq i \leq N} X_i \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha} E(X_N) ;$$

(ii) pour $p \geq 1$

$$E\left(\sup_{0 \leq i \leq N} X_i^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} E(X_N^p)^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION :

Partie (i). Soit $T = \inf\{i \geq 0 : X_i \geq \alpha\}$ le premier temps de passage au-dessus de α , avec la convention habituelle que l'inf de l'ensemble \emptyset est égal à $+\infty$. On a

$$\{T \leq N\} = \left\{ \sup_{0 \leq i \leq N} X_i \geq \alpha \right\},$$

ce qui montre que T est un temps d'arrêt au sens du chapitre 6. Étudions

$$\begin{aligned} E(X_{N \wedge T}) &= E(X_N \mathbf{1}_{T > N}) + E(X_T \mathbf{1}_{T \leq N}) \\ &= E(X_N \mathbf{1}_{T \geq N}) + \sum_{j=0}^{N-1} E(X_j \mathbf{1}_{T=j}) \\ &= E(X_N \mathbf{1}_{T \geq N}) + \sum_{j=0}^{N-1} E(X_N \mathbf{1}_{T=j}) \leq E(X_N) \end{aligned}$$

puisque $\{T = j\}$ est \mathcal{F}_j -mesurable. Ainsi

$$\begin{aligned} E(X_N) \geq E(X_{N \wedge T}) &= E(X_N \mathbf{1}_{T > N}) + E(X_T \mathbf{1}_{T \leq N}) \\ &\geq E(X_N \mathbf{1}_{T > N}) + \alpha P(T \leq N). \end{aligned}$$

D'où

$$P(T \leq N) \leq \frac{1}{\alpha} E(X_N \mathbf{1}_{T \leq N}) \leq \frac{1}{\alpha} E(X_N).$$

Partie (ii). Notons $A_N = \sup_{i \leq N} X_i$. L'inégalité ci-dessus peut se réécrire

$$P(A_N \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X_N \mathbf{1}_{A_N \geq \alpha}).$$

Or A_N étant positive

$$E(A_N^p) = p \int_0^\infty P(A_N \geq t) t^{p-1} dt.$$

Cette égalité est une conséquence immédiate de Fubini. D' où

$$\begin{aligned} E(A_N^p) &\leq p \int_0^\infty E(X_n \mathbf{1}_{A_N \geq t}) t^{p-2} dt \\ &= p E\left(\int_0^\infty X_n \mathbf{1}_{A_N \geq t} t^{p-2} dt\right) \\ &= p E\left(X_n \int_0^{A_N} t^{p-2} dt\right) = \frac{p}{p-1} E(X_n A_N^{p-1}). \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Hölder avec $q = p/p - 1$,

$$\mathbb{E}(X_N A_N^{p-1}) \leq \mathbb{E}(X_N^p)^{1/p} \mathbb{E}(A_N^p)^{(p-1)/p}.$$

d'où le résultat si A_N est borné. Sinon on raisonne comme dans le cas de \mathbb{L}^2 .

Remarque 4.5.2 (i) La preuve de 4.5.1 (i) permet d'établir le résultat plus précis suivant

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} X_i \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sup_{0 \leq i \leq N} X_i > \alpha\}}).$$

(ii) Pour $p = 2$, on retrouve le théorème 4.3.1, établi par une autre méthode.

(iii) Si M est une martingale et $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et croissante sur \mathbb{R}_+ (par exemple $\Phi(x) = x$, $\Phi(x) = x^2$ ou $\Phi(x) = \exp(ax)$ avec $a > 0$), l'inégalité (i) du théorème 4.5.1 appliquée à la sous-martingale $X_n = \Phi(|M_n|)$ donne pour $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} |M_i| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\Phi(\alpha)} \mathbb{E}(\Phi(|M_N|)).$$

Si Φ est croissante sur \mathbb{R} (par exemple $\Phi(x) = e^{ax}$ avec $a > 0$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} |M_i| \geq \alpha\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} M_i \geq \alpha\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} -M_i \geq \alpha\right) \\ &\leq \frac{1}{\Phi(\alpha)} [\mathbb{E}(\Phi(M_N)) + \mathbb{E}(\Phi(-M_N))]. \end{aligned}$$

L'exercice suivant est une application de cette inégalité.

Exercice 4.5.3 Soit $\{S_n\}$ la marche aléatoire simple ($p = q = 1/2$) sur \mathbb{Z} issue de 0 ($S_0 = 0$). Montrer que presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{h(n)} \leq 1$$

où

$$h(n) = (2n \ln(\ln(n)))^{1/2}.$$

On pourra (en utilisant la fonction $\Phi(x) = e^{ax}$) montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \alpha\right) \leq 2 \exp(-\alpha a + N a^2)$$

puis

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq i \leq N} |S_i| \geq \alpha\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2N}\right).$$

On pourra ensuite poser $N = K^n$ et $\alpha = Kh(K^{n-1})$ pour $K > 1$.

4.5.2 Théorèmes de Convergence

Le théorème de convergence des sous-martingales

Rappelons le théorème 4.4.1 de Doob.

Théorème 4.5.4 (Doob). *Soit X une sous-martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$. Alors il existe une v.a.r. $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ telle que $X_n \rightarrow X_\infty$ p.s.*

Nous donnons ici une preuve classique de ce théorème basée sur une inégalité importante (théorème (4.5.6)) sur les “traversées montantes” des sous-martingales.

Soit $x = \{x_n\}$ une suite de réels et $-\infty < a < b < \infty$. Nous dirons que x traverse $[a, b]$ en montant au moins N fois si il existe des instants $0 \leq s_1 < t_1 \leq \dots < s_N < t_N$ tels que $x_{s_i} \leq a$ et $x_{t_i} \geq b$. Si x traverse $[a, b]$ en montant au moins N fois mais pas $N + 1$ fois nous dirons que x traverse $[a, b]$ en montant exactement N fois. Le lemme suivant est évident.

Lemme 4.5.5 *Les assertions (i) et (ii) suivantes son équivalentes :*

- (i) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$;
- (ii) *il existe deux rationnels $a < b$ tels que x traverse $[a, b]$ en montant une infinité de fois.*

Théorème 4.5.6 *Soit X une sous-martingale, $-\infty < a < b < \infty$ et $U_{a,b} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de traversées montantes de $[a, b]$. Alors*

$$\mathbb{E}(U_{a,b}) \leq \sup_{n \geq 0} \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+}{b - a}$$

DÉMONSTRATION :

Soit $Y_n = \frac{(X_n - a)^+}{b - a}$. Posons $\tau_0 = 0$,

$$\sigma_k = \inf\{n \geq \tau_{k-1} : X_n \leq a\}$$

et

$$\tau_k = \inf\{n \geq \sigma_k : X_n \geq b\}.$$

Les instants τ_k, σ_k sont des temps d'arrêt. Soit $U_{a,b}^N$ le nombre de traversées montantes de $[a, b]$ entre l'instant 0 et l'instant N . clairement

$$\begin{aligned} U_{a,b}^N &\leq \sum_{k \geq 1} (Y_{N \wedge \tau_k} - Y_{N \wedge \sigma_k}) \\ &= Y_N - Y_0 - \sum_{k=1}^N (Y_{N \wedge \sigma_k} - Y_{N \wedge \tau_{k-1}}) \leq Y_N - \sum_{k=1}^N (Y_{N \wedge \sigma_k} - Y_{N \wedge \tau_{k-1}}). \end{aligned}$$

Comme $N \wedge \tau_{k-1} \leq N \wedge \sigma_k \leq N$, le théorème d'arrêt 6.2.1 appliqué à la sous-martingale Y montre que $\mathbb{E}(Y_{N \wedge \sigma_k} - Y_{N \wedge \tau_{k-1}}) \geq 0$. Ainsi $\mathbb{E}(U_{a,b}^N) \leq \mathbb{E}(Y_N) \leq \sup_n \mathbb{E}(Y_n)$ et on obtient le résultat en faisant tendre N vers l'infini.

Pour déduire de ce résultat la preuve du théorème 4.5.4, remarquons que d'après le lemme 4.5.5 si $\sup_n \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$, alors en appliquant le théorème 4.5.6, l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : \forall a < b \in \mathbf{Q} U_{a,b}(\omega) < \infty\}$$

est de probabilité 1. Ainsi d'après le lemme 4.5.5, (X_n) converge p.s. vers une v.a. X . Il reste à montrer que X est dans \mathbb{L}^1 .

$$\mathbf{E}(|X_n|) = \mathbf{E}(X_n^+) + \mathbf{E}(X_n^-) = 2\mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_n) \leq 2\mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_0),$$

ainsi $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$ et par le lemme de Fatou

$$\mathbf{E}(|X|) = \mathbf{E}(\liminf |X_n|) \leq \liminf \mathbf{E}(|X_n|) < \infty.$$

◇

Chapitre 5

Quelques applications des martingales

L'objet de ce chapitre est de montrer comment la théorie des martingales peut être utilisée dans des problèmes de modélisation. Nous avons choisi des thèmes inspirés par la biologie (processus de branchement), l'économie (urnes de Polya), l'informatique et l'optimisation (algorithmes d'approximation stochastique). Chaque section peut être lue indépendamment des autres.

5.1 Processus de branchement

De nombreux phénomènes d'évolution de population peuvent être modélisés en première approximation par un processus de branchement, dont le schéma typique est le suivant.

Des particules sont capables de générer des particules de la même famille. Chaque particule a la probabilité p_k d'engendrer k particules indépendantes. Une particule originale représente la génération 0. Les descendants de la n^{e} génération forment la $(n + 1)^{\text{e}}$ génération. On s'intéresse à la taille de la n^{e} génération.

– **Réaction nucléaires en chaîne**

Les particules sont des neutrons qui sont soumis aux chocs d'autres particules.

Une particule touchée crée m descendants avec probabilité p et meurt avec probabilité $q = 1 - p$. Dans le pire des cas, la première particule reste inactive et le processus ne démarre pas. Dans le bon cas, il y aura m particules de la première génération, m^2 pour la deuxième etc. Si p est presque 1, le nombre de particules augmente rapidement et conduit à l'explosion.

– **Survivance des noms de famille**

Ici, seuls les descendants mâles comptent car ils transmettent le nom. Ici p_k est donc la probabilité qu'un garçon ait k garçons.

Une première simplification vient de ce que la fertilité ne semble pas avoir de tendance, sinon p_k changerait de génération en génération... De plus, l'hérédité commune et l'environnement des frères peut être contraire à l'hypothèse d'indépendance. Le modèle peut être raffiné pour prendre cela en compte mais cela ne modifie pas les idées ¹ fondamentales.

– **Gènes et mutations**

Chaque gène d'un organisme donné a une chance de réapparaître dans 1, 2, ..., k descendants directs, et en première approximation on néglige les variations avec la population et le temps. C'est l'étude des mutations. Une mutation produit un gène d'un type nouveau qui joue le rôle de génération 0.

Pour fixer les idées, un plan de blé est le père de 100 graines et la mère d'autant. Si la taille de la population reste constante, une moyenne de 2 parmi ces deux cent graines développera un plan. Chaque graine a une chance sur deux de recevoir un gène donné. La probabilité qu'un gène mutant apparaisse dans k nouveaux plans est égale à la probabilité de k succès parmi 200 tirages de Bernouilli de probabilité $p = \frac{1}{200}$, soit

$$p_k = P(S_{200} = k) = C_{200}^k \left(\frac{1}{200}\right)^k \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200-k}$$

qui est très proche d'une distribution de Poisson de paramètre 1, soit $e^{-1} \frac{1}{k!}$.

5.1.1 Modélisation

Introduisons une modélisation "abstraite" de ces phénomènes, afin d'étudier la loi d'évolution du nombre Z_n d'individus à la n^e génération. Chacun des Z_n individus de la n^e génération donne naissance à un nombre aléatoire ξ_i^n de descendants ($1 \leq$

¹Notons que cet exemple, connu sous le nom de processus de Galton-Watson, a motivé la première étude sur les processus de branchement.

$i \leq Z_n$) de sorte que

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n \quad (n \geq 0),$$

où la somme vaut 0 si $Z_n = 0$.

Toutes les v.a. ξ_i^n sont supposées indépendantes entre elles et de même loi de probabilité dont la fonction génératrice est la fonction définie pour $0 \leq z \leq 1$ par

$$G(z) = G_\xi(z) = \mathbb{E}(z^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \leq 1.$$

Dans toute la suite, nous excluons le cas inintéressant où ξ serait égale à 1 presque certainement, c'est-à-dire le cas où $G(z) \equiv z$. Rappelons que l'espérance de la v.a. ξ peut être calculée à partir de la fonction génératrice, $\mathbb{E}(\xi) = G'(1)$.

Notons $G_n = G_{Z_n}$ la fonction génératrice de Z_n . L'indépendance des descendants et leur identité de distribution montre alors que G_n vérifie la relation de récurrence

$$G_{n+1}(z) = \mathbb{E}(z^{Z_{n+1}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^{Z_{n+1}} | Z_n)) = \mathbb{E}(G(z)^{Z_n}) = G_n[G(z)]$$

et si nous supposons que $Z_0 = 1$ de sorte que $G_0(z) \equiv z$, nous trouvons que pour tout $n \geq 1$,

$$G_n = G \circ G \circ G \circ \dots \circ G \text{ } n \text{ fois.}$$

Si le nombre de descendants est intégrable, le nombre moyen de descendants à la n^{e} génération est donné par $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\xi)^n$. Cette propriété se montre par récurrence à partir de la formule $\mathbb{E}(Z_n) = G'_n(1)$, $G(1) = 1$.

Remarque 5.1.1 La suite (Z_n) est une chaîne de Markov issue de 1, dont l'espace d'états est dénombrable. L'état 0 est absorbant. Nous n'aurons pas de mal à montrer que la chaîne est transiente. La question est alors de savoir si elle "sort" de \mathbb{N} par 0 ou par l'infini.

Exemple 5.1.2 Exemple de la loi géométrique²

La loi géométrique est la loi du premier succès dans une suite de tirages indépendants,

²Nous suivons la présentation de D. Williams dans son remarquable livre, Probability with martingales [32].

où le succès a une probabilité p . On donne l'indice 0 au résultat du premier tirage. On a donc une loi définie sur \mathbb{N} par

$$p_k = pq^k, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p, q < 1.$$

La fonction génératrice est égale à

$$G(z) = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k = \frac{p}{1 - qz}$$

et

$$E(\xi) = \frac{q}{p} = \mu.$$

Le calcul de la fonction génératrice associée à la n^e génération se fait par récurrence. Pour mener simplement le calcul, rappelons la relation qui existe entre composition des fonctions homographiques et produit de matrices.

En effet, si $A(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$ lorsque A est une matrice 2×2 de terme général (a_{ij}) , alors

$$A(B(z)) = (AB)(z).$$

En particulier si $p \neq q$, en utilisant la diagonalisation de la matrice A , dont les valeurs propres sont p et q , on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 1 \end{pmatrix}^n = (q - p)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$G_n(z) = \frac{pq^n(1 - z) + p^nqz - p^{n+1}}{q^{n+1}(1 - z) + qp^n z - p^{n+1}} = \frac{\mu^n(1 - z) + \mu z - 1}{\mu^{n+1}(1 - z) + \mu z - 1}. \quad (5.1)$$

Si $p = q = 1/2$, $G_n(z) = \frac{n(1 - z) + z}{(n + 1)(1 - z) + z}$ est la limite de l'expression précédente (5.1) quand μ tend vers 1. Cette formule se calcule aussi aisément par récurrence.

La probabilité d'extinction de la n^e génération est exactement

$$\begin{aligned} G_n(0) &= \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - 1} \quad \text{si } p \neq q \\ G_n(0) &= \frac{n}{n + 1} \quad \text{si } p = q. \end{aligned}$$

En résumé,

(i) Si $q < p$, ($p > 1/2$), $G_n(0) = P(Z_n = 0) \rightarrow 1$. Il y a extinction.

(ii) Si $p < q, (p < 1/2)$ $G_n(0) = P(Z_n = 0) \rightarrow \frac{p}{q}$. L'extinction n'est pas certaine.

(iii) Si $p = 1/2$, $G_n(0) = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. Il y a extinction.

Par suite, il n'y a que deux situations : ou la population s'éteint à coup sûr si $p \geq 1/2$, ou elle s'éteint avec une probabilité de $\frac{p}{q}$.

Dans le cas général, nous pouvons aussi étudier la probabilité d'extinction de la population. L'outil essentiel est la suite de fonctions génératrices (G_n) puisque la probabilité d'extinction de la génération n est $\pi_n = P(Z_n = 0) = G_n(0)$.

Comme les événements $\{Z_n = 0\}$ forment une suite croissante, l'événement «extinction de la population» est donc naturellement défini par

$$\text{Ext} := \lim_n \uparrow \{Z_n = 0\}.$$

D'où

$$P(\text{Ext}) = \pi = \lim_n \uparrow \pi_n. \quad (5.2)$$

Puisque la fonction G est continue, et que les fonction G_n sont des itérées de la fonction G , la suite π_n vérifie $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$. La probabilité d'extinction est donc une solution π de l'équation

$$\pi = G(\pi)$$

Remarquons que 1 est toujours solution de cette équation. Nous recherchons s'il existe d'autres solutions. La forme du graphe de la fonction G , qui est une fonction analytique, convexe et croissante, avec $G(0) = P(X = 0) > 0$ et $G(1) = 1$, permet d'avoir une réponse simple suivant la valeur de μ . Deux cas seulement se présentent.

Théorème 5.1.3 *Dans les cas sous-critique ($E(\xi) < 1$) et critique ($E(\xi) = 1$), la population s'éteint presque certainement : $P(\text{Ext}) = 1$. Dans le cas sur-critique ($E(\xi) > 1$), la probabilité d'extinction $P(\text{Ext})$ est égal au nombre positif π strictement inférieur à 1, solution unique de $G(\pi) = \pi$ dans $[0, 1[$.*

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme analytique suivant.

Lemme 5.1.4 (i) *Si $E(\xi) = G'(1) \leq 1$, $G_n(z)$ croît vers 1 lorsque $n \nearrow \infty$ pour tout $z \in [0, 1]$.*

- (ii) Si $E(\xi) > 1$, l'équation $G(\pi) = \pi$ possède une solution unique dans $[0, 1[$ et $G_n(z)$ croît vers π lorsque $n \nearrow \infty$, pour tout $z \in [0, \pi]$ et décroît vers π pour tout $z \in [\pi, 1[$.

DÉMONSTRATION :

(i) L'application $z \rightarrow G(z)$ de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même est croissante et convexe car les dérivées

$$G'(z) = E(\xi z^{\xi-1}) \quad \text{et} \quad G''(z) = E[\xi(\xi-1)z^{\xi-2}]$$

sont positives en tant qu'espérances de v.a. réelles discrètes positives. De plus $G(1) = 1$. Comme nous avons exclu le cas $G(z) \equiv z$, la courbe G ne coupe pas la diagonale du carré $[0, 1]^2$ en un point distinct de $(1, 1)$ si $G'(1) \leq 1$, et au contraire la coupe si $G'(1) > 1$; ceci se voit bien sur la figure ci-dessous. Ainsi, selon le cas, l'équation de point fixe $G(\sigma) = \sigma$ n'a pas de solution ou au contraire possède une unique solution dans $[0, 1[$.

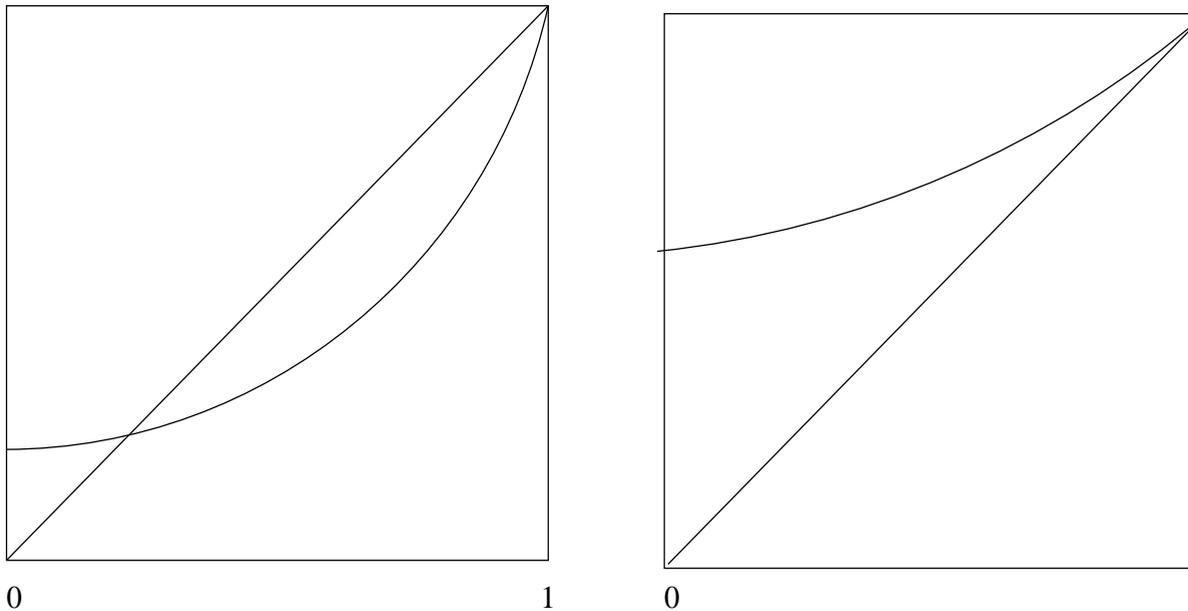


Figure 5.1 La fonction G dans les deux cas $E(\xi) > 1$ et $E(\xi) \leq 1$.

(ii) Lorsque $G'(1) \leq 1$, nous avons $z \leq G(z)$ et donc $G_n(z) \leq G_{n+1}(z)$ (puisque $G_{n+1} = G \circ G_n$) pour tout z ; la limite $\lim_n \nearrow G_n(z)$ qui est ≤ 1 et solution de $G(u) = u$, ne peut alors valoir que 1. En particulier, grâce à (5.2)

$$P(\text{Ext}) = \lim_n G_n(0) = 1.$$

(iii) Semblablement si $G'(1) > 1$, nous avons $z \leq G(z) \leq \pi$ ou $z \geq G(z) \geq \pi$ selon que $z \leq \pi$ ou que $z \geq \pi$; il s'en suit que $G_n(z)$ croît resp. décroît avec n selon le cas. La limite $\lim_n G_n(z)$ qui est solution de $G(u) = u$ et strictement inférieure à 1, du moins si $z \neq 1$, est alors égale nécessairement à π . Ainsi

$$P(\text{Ext}) = \lim_n G_n(0) = \pi \quad .$$

5.1.2 Vitesse de convergence

Il est important d'avoir des idées des vitesses de convergence vers l'extinction. La plupart des résultats sont obtenus à partir d'une étude plus fine des fonctions génératrices.

Lemme 5.1.5 (i)

$$1 - G_n(z) \leq [E(\xi)]^n(1 - z) \quad \forall z \quad (5.3)$$

$$0 \leq \pi - G_n(z) \leq c^n(\pi - z), \quad \forall z \leq \pi, \text{ où } c = G'(\pi). \quad (5.4)$$

(ii) Si $E(\xi) = 1$, et ξ est de variance σ^2 , alors

$$\lim_n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 - G_n(s)} - \frac{1}{1 - s} \right] = \sigma^2/2$$

uniformément pour tout $0 \leq s < 1$.

Remarque 5.1.6 Dans le cas de la loi géométrique, $E(\xi) = q/p$ et si $p < q$ $\pi = p/q$, $c = G'(\pi) = \pi$.

DÉMONSTRATION :

Les deux premières inégalités sont des inégalités de convexité pour la fonction G_n , du type

$$G_n(x) - G_n(y) \leq G'_n(x)(x - y).$$

- La première applique l'inégalité entre les points 1 et z . Elle utilise donc la dérivée de G_n au point 1 dont nous avons montré que $G'_n(1) = E(Z_n) = E(\xi)^n$
- La deuxième l'applique aux points π et z . Comme π est un point fixe de G , par récurrence $G'_n(\pi) = G'_{n-1}(G(\pi))c = G'_{n-1}(\pi)c = c^n$.

Pour la dernière estimation, nous utilisons le développement limité de la fonction génératrice au voisinage de $s = 1$, dont les premiers coefficients sont $E(\xi) = 1$ et $\frac{1}{2}E(\xi(\xi - 1)) = \frac{1}{2}\sigma^2$, soit

$$G(s) = s + \sigma^2/2(1 - s)^2 + \varepsilon(s)(1 - s)^2$$

où la fonction $\varepsilon(s)$ tend vers 0 si $s \rightarrow 1$. Cela conduit à une estimation uniforme

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - G(s)} - \frac{1}{1 - s} &= \frac{G(s) - s}{(1 - G(s))(1 - s)} \\ \frac{1 - s}{1 - G(s)} [\sigma^2/2 + \varepsilon(s)] &= \sigma^2/2 + r(s) \end{aligned}$$

où $r(s) \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 1$.

Reitérons cette estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 - G_n(s)} - \frac{1}{1 - s} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{1 - G(G_j(s))} - \frac{1}{1 - G_j(s)} \right] \\ &= \sigma^2/2 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} r(G_j(s)) \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0, d'après le lemme d'Abel puisque $G_n(s) \rightarrow 1$.

Puisque $G_n(s)$ est croissante et converge vers 1 uniformément, et la fonction r bornée, la convergence est uniforme.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.1.7 (i) *Dans le cas sous-critique ($E(\xi) < 1$) la probabilité de «non extinction à l'instant n » tend vers 0 à une vitesse géométrique d'après (5.3), soit*

$$P(Z_n \neq 0) = 1 - G_n(0) \leq [E(\xi)]^n.$$

De plus $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang.

(ii) *Dans le cas sur-critique ($E(\xi) > 1$) sachant qu'il n'y a pas extinction la taille de la population Z_n explose. Plus précisément pour tout entier a il existe une constante k_a telle que*

$$1 - P(Z_n > a | \text{nonExt}) \leq k_a G'(\pi)^n.$$

(iii) *Dans le cas critique ($E(\xi) = 1$) si $E(\xi^2) < \infty$*

$$P(Z_n \neq 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

DÉMONSTRATION :

⇒ Pour tout entier $a > 0$ et quel que soit z que l'on se sera fixé dans $]0, \pi[$, d'après (5.4)

$$\mathbb{P}(0 < Z_n \leq a) \leq z^{-a} \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_n = k) = z^{-a} [G_n(z) - G_n(0)] \leq 2\pi c^n z^{-a}.$$

Quand $c = G'(\pi) < 1$ (cas sous-critique et sur-critique), puisque la série géométrique est convergente,

$$\mathbb{E}\left(\sum_n \mathbf{1}_{(0 < Z_n \leq a)}\right) < \infty.$$

La somme sous le signe espérance est donc nécessairement presque sûrement finie.

⇒ Pour presque toutes les évolutions, seuls un nombre fini de Z_n restent dans l'intervalle $]0, a[$ (lemme de Borel Cantelli). Comme les événements sont croissants, $Z_n = 0$ implique que $Z_{n'} = 0$ pour tout $n' > n$ p.s. Deux cas seulement sont possibles :

- ou bien $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang (c'est l'extinction),
- ou bien $Z_n > a$ à partir d'un certain rang et comme a est arbitraire : $Z_n \rightarrow \infty$ (c'est l'explosion).

Ces deux événements complémentaires ont resp. pour probabilités π et $1 - \pi$. De plus

$$1 - \mathbb{P}(Z_n \geq a | Z_m \rightarrow \infty) \leq \frac{\mathbb{P}(0 < Z_n \leq a)}{\mathbb{P}(Z_m \rightarrow \infty)} \leq \frac{2\pi c^n z^{-a}}{1 - \pi}.$$

⇒ Dans le cas critique, la probabilité d'extinction tend beaucoup plus lentement vers zéro et plus précisément, si $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$,

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

puisque

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(Z_n \neq 0) &= n(1 - G_n(0)) \\ &= \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - G_n(0)} - 1\right) + \frac{1}{n}\right]^{-1} \rightarrow \frac{2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que la **théorie des martingales** permet de donner une autre approche de ces problèmes et d'avoir des résultats précis même dans le cas critique.

5.1.3 Une martingale remarquable pour le branchement

Notons $\mu = \mathbb{E}(\xi)$ le nombre moyen d'enfants de chaque individu. Remarquons que

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | Z_n) = \mu Z_n.$$

En particulier

$$M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$$

est une martingale positive, d'espérance 1 (car $Z_0 = 1$) dont nous allons étudier la convergence.

Convergence p.s.

D'après le théorème 4.4.1 de convergence des martingales positives

$$M_n \rightarrow M_\infty.$$

Ainsi, sur $\{M_\infty > 0\}$, la suite Z_n a une croissance exponentielle. Dans le cas sous-critique où $\mu < 1$, $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang. La v.a. M_∞ est donc nulle p.s. Remarquons l'apparente contradiction avec le fait que la martingale est d'espérance 1. On a donc là une situation typique où la convergence p.s. et la convergence dans \mathbb{L}^1 ne coïncident pas. Intuitivement, cela veut dire que si M_n n'est pas nulle, alors elle prend de très grandes valeurs avec une petite probabilité. C'est ce qu'on appelle un phénomène de *grande déviation*.

Convergence dans \mathbb{L}^2

Supposons que le nombre typique d'enfants est une v.a. de moyenne $E(\xi) = \mu$ et de variance $\text{Var}(\xi) = \sigma^2$.

Par la définition même du processus de branchement

$$E(Z_{n+1}^2 | Z_n) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n,$$

d'où

$$E(M_{n+1}^2) = E(M_n^2) + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+2}},$$

de telle sorte que la martingale (M_n) est bornée dans \mathbb{L}^2 si et seulement si $\mu > 1$. Le théorème de convergence des martingales nous assure que la v.a. limite p.s. est aussi limite dans \mathbb{L}^2 et donc

$$E(M_\infty) = 1, \quad \text{Var}(M_\infty) = \sigma^2(\mu(\mu - 1))^{-1}.$$

Convergence dans \mathbb{L}^1 et loi de M_∞

Nous avons vu que la convergence dans \mathbb{L}^1 de la martingale (M_n) ne peut être automatique. Le meilleur résultat qui a été établi est le suivant

$$E(M_\infty) = 1, \quad \text{si et seulement si } \mu > 1, \text{ et } E(\xi \ln \xi) < +\infty.$$

Il existe donc des situations où il n'y a pas extinction, mais où la martingale limite est nulle p.s. Dans tous les cas, comme la v.a. limite est positive, on peut s'intéresser à sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) := E(\exp(-\lambda M_\infty)) = \lim_n E(\exp(-\lambda M_n))$$

puisque dans ces conditions le théorème de convergence dominée s'applique. Or $E(\exp(-\lambda M_n)) = E(\exp(-\frac{\lambda}{\mu^n} Z_n)) = G_n\left(\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu^n}\right)\right)$. La transformée de Laplace vérifie donc une équation fonctionnelle de la forme

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda\mu) = G(\mathcal{L}_\infty(\lambda)).$$

Dans le cas où l'on connaît explicitement la fonction G_n , on peut décrire complètement la distribution de M_∞ .

Exemple 5.1.8 (La loi géométrique (ii)). Dans ce cas, la transformée de la Laplace de M_n qui vaut

$$G_n(z_n) = p \frac{q^n(1 - z_n) + p^{n-1}qz_n - p^n}{q^{n+1}(1 - z_n) + qp^n z_n - p^{n+1}}, \quad z_n = \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu^n}\right),$$

converge vers

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) = \frac{p\lambda + q - p}{q\lambda + q - p}.$$

Comme dans ce contexte, $\pi = \inf(\frac{p}{q}, 1)$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}_\infty(\lambda) = \pi + \int (1 - \pi)^2 e^{-\lambda x} e^{-(1-\pi)x} dx$$

C'est la transformée de Laplace d'une distribution qui a une masse de Dirac en 0 de probabilité π , et qui, sachant qu'on n'est pas en zéro, suit une loi exponentielle de paramètre $(1 - \pi) = p(\mu - 1)^+$.

5.2 Urnes de Polya et économie

Une urne contient N boules de couleurs $1, 2, \dots, m$ en quantités N^1, N^2, \dots, N^m avec $N^i \geq 1$ et $N^1 + \dots + N^m = N$. À chaque instant $n = 1, 2, \dots$ on tire une boule au hasard dans l'urne puis on la remet en ajoutant une boule de même couleur. Soit N_n^i le nombre de boules de couleur i à l'instant n , X_n^i la proportion de boules de couleur i (i.e. $X_n^i = \frac{N_n^i}{N+n}$) et $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^m)$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Par construction

$$E(N_{n+1}^i - N_n^i | \mathcal{F}_n) = X_n^i,$$

d'où

$$E(X_{n+1}^i - X_n^i | \mathcal{F}_n) = 0.$$

La suite (X_n^i) est une martingale bornée donc (théorème 4.3.3) presque sûrement convergente.

Urnes de Polya et "standardisation" L'émergence de standards dans les économies décentralisées est une question fascinante qui pose de sérieux problèmes aux théories économiques classiques. De récents modèles utilisant des processus aléatoires (de type urnes de Polya) permettent de rendre de compte de certains des phénomènes qui échappent à l'analyse classique.

Imaginons que des "agents" aient à choisir entre des technologies concurrentes – par exemple des ordinateurs (PC ou Mac), des consoles de jeux, des lecteurs de cassettes vidéo (VHS ou Betamax), etc. Si le choix d'une technologie est sans doute guidée par des considérations personnelles, il est indéniablement influencé par le choix des autres agents. Un type d'ordinateur ou un lecteur de cassettes est d'autant plus utile qu'il est utilisé par le plus grand nombre. C'est ce que les économistes appellent des *externalités de réseau*.

À cet égard, l'histoire de la compétition entre VHS et Betamax est très instructive. À la fin des années 70, deux systèmes concurrents de lecteurs vidéo coexistaient sur le marché. Le système Betamax proposé par Sony en 1975 et le système VHS proposé par JVC en 1976. Il s'agissait de technologies incompatibles en ce sens qu'il n'était pas possible de lire une cassette VHS avec un lecteur Betamax (et réciproquement). Betamax offrait une meilleure résolution graphique et cette supériorité technologique jointe à la réputation de Sony semblait favoriser Betamax. Pourtant, en 1987, VHS était devenu le standard avec une part de marché de 95 %. Ce phénomène dit de "lock-in" est caractéristique des renforcements liés aux externalités de réseau.

Nous décrivons maintenant un modèle directement inspiré par des travaux récents

d'économistes (voir par exemple Arthur [35] ou Auriol [36]). Supposons qu'il y ait deux technologies (notées 1 et 2) en compétition. Un agent est caractérisé par son "type" $0 \leq \delta \leq 1$ qui représente sa préférence a priori pour la technologie 1. Ainsi $\delta = 1$ (resp. 0) si c'est un inconditionnel de 1 (resp. 2) et $\delta = 1/2$ si il est indifférent.

Soit X^i la part de marché de la technologie i , $\delta^1 = \delta$ et $\delta^2 = 1 - \delta$. L'utilité de l'agent pour la technologie $i \in \{1, 2\}$ est une fonction $U^i(\delta^i, X^i)$, croissante en δ^i et en X^i .

On suppose qu'à chaque instant discret $n = 1, 2, \dots$ un agent arrive sur le marché et adopte la technologie qui maximise son utilité. Ainsi, à l'instant $n+1$, la technologie 1 est adoptée si

$$U^1(\delta_{n+1}^1, X_n^1) > U^2(\delta_{n+1}^2, X_n^2).$$

Supposons maintenant les variables δ_n i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et

$$U^i(\delta^i, X^i) = \delta^i X^i.$$

Alors, en posant N_n^i le nombre d'individus ayant adopté la technologie i à l'instant n et $X_n^i = \frac{N_n^i}{n}$,

$$P(N_{n+1}^1 - N_n^1 = 1 | \mathcal{F}_n) = P(\delta_{n+1} \geq 1 - X_n^1 | \mathcal{F}_n) = X_n^1.$$

Ceci montre que l'évolution de (X_n^1, X_n^2) est celle d'une urne à deux couleurs.

La proposition 5.2.2 ci-dessous montre que la loi de X_∞^1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est ainsi qu'une technologie ayant à un instant donné une part de marché dominante peut très bien "perdre" la compétition.

Exercice 5.2.1 (Urne de Polya : deux couleurs). On suppose qu'il n'y a au point de départ que deux boules, une blanche et une rouge ($m = 2$, $N^1 = N^2 = 1$). On note X_n la proportion de boules blanches, qui d'après le résultat précédent est une martingale qui converge p.s. vers $U \leq 1$. On désigne par $N_n = X_n(n+2)$ le nombre de boules blanches et

$$Z_n^{(k)} = \frac{N_n(1+N_n) \cdots (k-1+N_n)}{(1+n) \cdots (k+n)}.$$

Montrer que $Z_n^{(k)}$ est une martingale bornée, qui converge p.s. vers U^k et que $E(U^k) = 1/(k+1)$. En déduire que U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Proposition 5.2.2 Soient $N^i \geq 1$, $i = 1, \dots, m$, le nombre initial de boules de couleur i , X_n le vecteur des proportions à l'instant n (i.e. $X_n^i = \frac{N^i}{N+n}$) et

$$X_\infty = (X_\infty^1, \dots, X_\infty^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Alors la loi du vecteur $(X_\infty^1, \dots, X_\infty^{m-1})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité la fonction

$$f(u_1, \dots, u_{m-1}) = \mathbf{1}_{\Sigma^{m-1}}(u_1, \dots, u_{m-1}) \frac{(\prod_{i=1}^{m-1} u_i^{N^i-1})(1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i)^{N^m-1}}{C(N^1, \dots, N^m)},$$

où

$$\Sigma^{m-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{m-1} : u_i > 0, \sum u_i < 1 \right\},$$

et

$$C(N^1, \dots, N^m) = \frac{\prod_{i=1}^m (N^i - 1)!}{(\sum_{i=1}^m N^i - 1)!}.$$

DÉMONSTRATION :

Étape 1 : On prouve d'abord le résultat dans le cas particulier où $N^1 = N^2 = \dots = N^m = 1$. Soit $E_n = \{(p^1, \dots, p^m) : p^i \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^m p^i = n\}$ l'ensemble des distributions possibles de couleurs pour une urne ayant n boules. Vérifions par récurrence que $N_n = (N_n^1, \dots, N_n^m)$ a une loi uniforme sur E_{n+m} . C'est immédiat pour $n = 0$ car $E_m = \{(1, \dots, 1)\}$ et par hypothèse $N_0 = (1, \dots, 1)$. À l'étape $n + 1$, pour tout $p \in E_{n+1+m}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{n+1} = p) &= \\ \sum_{\{i : p^i > 1\}} \mathbb{P}(N_{n+1} = p | N_n = (p^1, \dots, p^i, p^i - 1, p^{i+1}, \dots, p^m)) &\mathbb{P}(N_n = (p^1, \dots, p^i, p^i - 1, p^{i+1}, \dots, p^m)) \\ &= \sum_{\{i : p^i > 1\}} \frac{p^i - 1}{n + m} \mathbb{P}(N_n = (p^1, \dots, p^i, p^i - 1, p^{i+1}, \dots, p^m)) \\ &= \sum_{i : p^i > 1} \frac{p^i - 1}{n + m} \mu_n, \end{aligned}$$

où

$$\mu_n = \frac{1}{\text{card}(E_{n+m})}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = p) = \mu_n \frac{n + 1}{n + m}.$$

Cette expression étant indépendante du choix de p , ceci prouve que la loi de N_{n+1} est uniforme. De l'uniformité de la loi de N_n , il n'est pas difficile de déduire que pour toute fonction continue $H : \Sigma^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \left(H \left(\frac{N_n^1}{n+m}, \dots, \frac{N_n^{m-1}}{n+m} \right) \right) \rightarrow \int_{\Sigma^{m-1}} H(u) \lambda(du),$$

où λ désigne la probabilité uniforme sur Σ^{m-1} . Comme, par ailleurs, $(\frac{N^1}{n+m}, \dots, \frac{N^{m-1}}{n+m})$ converge presque sûrement vers $(X_\infty^1, \dots, X_\infty^{m-1})$ ceci conclut la preuve de l'étape 1.

Étape 2 : On prouve maintenant le résultat dans le cas général. Si il y a N^i boules de couleur i (par exemple rouge), on commence par "repeindre" ces boules de manière à pouvoir les distinguer en introduisant N^i nuances de la couleur i (par exemple grenat, pourpre, rubis, etc.) ce qui nous ramène à l'étape 1. Pour conclure il suffit alors de montrer que si $X = (X_1, \dots, X_{N-1})$ est un vecteur de loi uniforme sur Σ^{N-1} , alors le vecteur

$$U = \left(\sum_{i=1}^{N^1} X_i, \sum_{i=N^1+1}^{N^2} X_i, \dots, \sum_{i=N^{m-1}+1}^{N^m-1} X_i \right)$$

a pour densité la fonction f de la proposition 5.2.2. Pour ce faire on utilise le lemme ci-dessous.

Lemme 5.2.3 Soient Y_1, \dots, Y_N des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1 :

$$P_{Y_i}(dx) = \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx.$$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Alors le vecteur

$$U = \frac{1}{S_N} (S_{N^1}, S_{N^2} - S_{N^1}, \dots, S_{N^{m-1}} - S_{N^{m-2}})$$

a pour densité la fonction f de la proposition 5.2.2.

DÉMONSTRATION :

On commence par étudier le cas $N^1 = N^2 = \dots = N^m = 1$. Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_{+,*}^m &\rightarrow \Sigma^{m-1} \times \mathbb{R}_{+,*} \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (u_1, \dots, u_{m-1}, s) \end{aligned}$$

le difféomorphisme défini par $s = \sum x_i$ et $u_i = x_i/s$, $i = 1, \dots, m-1$. Alors

$$(U, S_m) = \Phi(Y_1, \dots, Y_m)$$

et par application de la formule de changement de variable, (U, S_m) admet pour densité la fonction

$$(u, s) \rightarrow |\det D\Phi^{-1}(u, s)| h(\Phi^{-1}(u, s)) \mathbf{1}_{\Sigma^{m-1} \times \mathbb{R}_{+,*}}$$

où

$$h(x) = \exp\left(-\sum_i x_i\right).$$

L'inverse de Φ est le difféomorphisme $\Psi : \Sigma^{m-1} \times \mathbb{R}^{*,+} \rightarrow (\mathbb{R}^{*,+})^m$ défini par

$$x_i = u_i s, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad \text{et} \quad x_m = s \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i \right).$$

Ainsi

$$D\Psi(u, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & * & 0 & u_1 \\ 0 & s & * & 0 & u_2 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & s & u_{m-1} \\ -s & -s & * & -s & (1 - \sum u_i) \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le déterminant Jacobien $J = \det(D\Psi(u, s))$, il suffit d'ajouter chacune des $m-1$ premières lignes à la dernière ligne de $D\Psi(u, s)$. Ainsi

$$J = \begin{vmatrix} s & 0 & * & 0 & u_1 \\ 0 & s & * & 0 & u_2 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & s & u_{m-1} \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{vmatrix} = s^{m-1}.$$

Par application de la formule du changement de variable, la densité de (U, S_m) est égale à

$$e^{-s} s^{m-1} \mathbf{1}_{\Sigma^{m-1} \times \mathbb{R}_{+,*}}.$$

Le vecteur U suit donc une loi uniforme sur l'ensemble

$$\Sigma^{m-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{m-1} : u_i > 0, \sum_{i=1}^{m-1} u_i < 1 \right\}.$$

Par ailleurs, S_m est indépendante de U et suit une loi Γ de paramètre m :

$$dP_{S_m}(s) = \frac{1}{(m-1)!} e^{-s} s^{m-1} \mathbf{1}_{s>0}.$$

Dans le cas où les valeurs de N^1, N^2, \dots, N^m sont quelconques, on remarque maintenant que

$$(U, S_m) = \Phi(Z_1, \dots, Z_m)$$

où les Z_i sont des v.a. indépendantes et Z_i suit une loi Γ de paramètre N^i . La même formule de changement de variable prouve alors le résultat final.

Remarque 5.2.4 Supposons $N^1 = N^2 = \dots = N^m = k$. Dans le contexte de l'exemple des externalités de réseau, cela signifie que les parts de marché initiales des

technologies concurrentes sont identiques. Si $k = 1$, la loi de X_∞ est uniforme sur le simplexe

$$S^{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

et il est impossible de prédire les parts de marché à l'équilibre (*i.e.* X^∞). Par contre, plus k est "grand", plus la loi de X^∞ est "proche" d'une mesure de Dirac portée par le barycentre de S^{m-1} .

Plus généralement (et plus précisément), supposons $N^i = Nx^i$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x^1, \dots, x^m) \in S^{m-1}$. Soit S_n la somme de n variables i.i.d. de loi exponentielle. D'après le lemme 5.2.3, X^∞ est distribué comme le vecteur

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S_N} (S_{Nx_1}, S_{N(x_1+x_2)} - S_{Nx_1}, \dots, S_N - S_{N(x_1+\dots+x_{m-1})}) \\ &= \frac{N}{S_N} \left(x_1 \frac{S_{Nx_1}}{Nx_1}, x_2 \frac{S_{N(x_1+x_2)} - S_{Nx_1}}{Nx_2}, \dots, x_m \frac{S_N - S_{N(x_1+\dots+x_{m-1})}}{Nx_m} \right). \end{aligned}$$

D'après la loi forte des grands nombres, cette dernière quantité converge presque sûrement vers le vecteur (x_1, \dots, x_m) lorsque $N \rightarrow \infty$. Ainsi, la loi de X^∞ converge étroitement, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers δ_x la mesure de Dirac portée par le point x . De manière équivalente, la loi conditionnelle de X^∞ sachant $X_n = x$ converge étroitement, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers δ_x .

5.3 Algorithmes d'approximation stochastique

Nous allons appliquer ici certaines propriétés des martingales à l'étude des *algorithmes d'approximation stochastique*. Un algorithme d'approximation stochastique est un processus aléatoire (X_n) à valeurs dans \mathbb{R}^m solution d'une récurrence de la forme

$$X_{n+1} - X_n = \gamma_{n+1}(F(X_n) + U_{n+1}). \quad (5.5)$$

Dans toute cette section nous supposons les conditions suivantes ((i) à (iv)) vérifiées :

(i) $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application régulière, au moins localement lipschitzienne³ ;

³Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, il existe un voisinage U_x de x et une constante K_x tels que $\forall u, v \in U_x, \|F(u) - F(v)\| \leq K_x \|u - v\|$.

- (ii) la suite (U_n) est une suite d'accroissements de martingales, c'est-à-dire qu'il existe une filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ telle que (U_n) est adaptée à $\{\mathcal{F}_n\}$ et $E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$;
- (iii) la suite (γ_n) est une suite déterministe de réels positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$$

et

$$\sum_n \gamma_n = \infty ;$$

- (iv) X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable, de sorte que (X_n) est adapté à $\{\mathcal{F}_n\}$.

Exemple 5.3.1 (Urnes de Polya et standardisation, (ii)). Nous revenons sur le modèle d'adoption de technologie décrit dans la section 5.2. On rappelle qu'à chaque instant des individus ont à choisir entre deux technologies concurrentes. À l'instant $n + 1$, la technologie 1 est adoptée si

$$U^1(\delta_{n+1}, X_n) > U^2(1 - \delta_{n+1}, 1 - X_n),$$

où $0 \leq \delta_{n+1} \leq 1$ est une variable aléatoire qui représente la préférence a priori de l'agent pour la technologie 1, X_n (respectivement $1 - X_n$) est la part de marché de la technologie 1 (resp. 2) à l'instant n et U^1 (resp. U^2) est une fonction d'utilité croissante en chacune de ses variables. Les variables (δ_n) sont supposées i.i.d. Soit $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par

$$p(x) = P(U^1(\delta_n, x) > U^2(1 - \delta_n, 1 - x)) \quad (5.6)$$

et

$$F(x) = -x + p(x). \quad (5.7)$$

On suppose p (donc F) lipschitzienne. Soit (U_n) la suite de variables aléatoires définie par

$$U_{n+1} = (n + 1)(X_{n+1} - X_n - F(X_n)).$$

Alors (X_n) vérifie (5.5) avec $\gamma_n = 1/n$ et $E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ car

$$(n + 1)E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - nX_n = p(X_n).$$

Exemple 5.3.2 (Le bandit à deux bras). Un bandit à deux bras est une machine à sous qui fonctionne ainsi. Un joueur choisit un bras A ou B . Le bras A (resp. B)

est “gagnant” avec probabilité θ_A (resp. θ_B). Les paramètres θ_A et θ_B sont inconnus du joueur dont l’objectif est de déterminer le bras dont la probabilité de gagner est la plus grande. Voici un “algorithme d’apprentissage” proposé par Narendra (voir Duflo [18, Chapitre 2]). À l’instant n , le bras A est choisi avec probabilité X_n et B avec probabilité $(1 - X_n)$. Soit $C_n \in \{A, B\}$ (resp. G_n) le bras choisi (resp. gagnant) à l’instant n , alors

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1}[(1 - X_n)\mathbf{1}_{\{C_n=A, G_n=A\}} - X_n\mathbf{1}_{\{C_n=B, G_n=B\}}].$$

Autrement dit, on augmente légèrement la probabilité de jouer A à l’instant $n + 1$ (resp. B) si à l’instant n , A (resp. B) est choisi et est gagnant. Soit \mathcal{F}_n la filtration engendrée par les variables $(C_1, G_1), \dots, (C_n, G_n)$. Alors

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = \gamma_{n+1}[(1 - X_n)\theta_A X_n - X_n\theta_B(1 - X_n)].$$

Ceci montre que (X_n) est solution de (5.5) avec

$$F(x) = x(1 - x)(\theta_A - \theta_B) \tag{5.8}$$

et (U_n) une suite d’accroissements de martingales.

Exemple 5.3.3 (Dosage et algorithme de Robbins-Monro). Une dose x d’un produit chimique administré à un sujet produit un effet aléatoire $Z(x)$ d’espérance $\mathbb{E}(Z(x)) = f(x)$. On fait l’hypothèse que la fonction f est continue strictement croissante. On ne connaît pas f mais on cherche à déterminer la dose x^* qui produit un effet moyen $f(x^*) = a$. La procédure de Robbins et Monro est la suivante : à chaque instant on administre une dose X_n à un nouveau sujet, on mesure l’effet produit Z_{n+1} , puis on modifie la dose selon l’algorithme

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1}(a - Z_{n+1}).$$

Si les sujets sont indépendants, la variable

$$U_{n+1} = Z_{n+1} - f(X_n)$$

est un accroissement de martingales et l’algorithme se réécrit sous la forme (5.5) avec

$$F(x) = a - f(x).$$

La méthode de l'EDO

Une méthode efficace pour étudier l'algorithme d'approximation stochastique (5.5) consiste à comparer le comportement asymptotique presque sûr des solutions de (5.5) avec celui des solutions de l'Équation Différentielle Ordinaire $\frac{dx}{dt} = F(x)$. L'application F étant supposée localement lipschitzienne, le *problème de Cauchy associé à F avec condition initiale x* ,

$$\frac{dy}{dt} = F(y), y(0) = x$$

admet une unique *solution maximale* (voir par exemple Hirsch et Smale [20] ou Viterbo [11]). Plus précisément, il existe un intervalle ouvert $I_x \subset \mathbb{R}$ contenant l'origine et une courbe $C^1, \eta : I_x \rightarrow \mathbb{R}^m$, tels que $\eta(0) = x$ et $\dot{\eta}(t) = F(\eta(t))$. Par ailleurs si $\xi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une autre solution, alors $J \subset I_x$ et $\eta = \xi$ sur J .

Le champ de vecteurs F est dit *complet* si $I_x = \mathbb{R}$ pour tout x . Une condition suffisante assurant la complétude de F est que

$$\|F(x)\| \leq a\|x\| + b$$

pour des constantes $a, b \geq 0$. Nous supposons ici que les trajectoires de (5.5) sont presque sûrement bornées. Aussi, sans perte de généralité, nous pouvons toujours supposer que F est complet.

Sous cette hypothèse (complétude de F) le champ de vecteurs F induit un *flot* continu (C^k si F est C^k)

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$(t, x) \rightarrow \Phi_t(x),$$

défini par

$$\frac{d\Phi_t(x)}{dt} = F(\Phi_t(x)) \text{ et } \Phi_0(x) = x.$$

En d'autres termes, $t \rightarrow \Phi_t(x)$ est la solution maximale du problème de Cauchy associé à F avec condition initiale x . L'application Φ vérifie la propriété de *flot* suivante.

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}.$$

En particulier, l'application $\Phi_t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est homéomorphisme (un C^k -difféomorphisme si F est C^k) d'inverse Φ_{-t} .

Définition 5.3.4 Une application continue $\mathbf{x} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une pseudo-trajectoire asymptotique (P.T.A.) du flot Φ si pour tout $T > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\Phi_s(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{x}(t+s)\| = 0.$$

Ceci signifie que, pour t assez grand, sur l'intervalle $[0, T]$ la trajectoire $s \rightarrow \mathbf{x}(t+s)$ est proche de la solution du problème de Cauchy associé à F avec la condition initiale $\mathbf{x}(t)$.

Le théorème qui suit montre que les solutions aléatoires de (5.5) définissent naturellement des P.T.A. du flot induit par F .

Théorème 5.3.5 Soit (X_n) solution de (5.5) et \mathbf{x} le processus interpolé défini par

$$\forall s \in [0, \gamma_{n+1}[, \mathbf{x}(\tau_n + s) = X_n + s \frac{X_{n+1} - X_n}{\gamma_{n+1}}$$

où

$$\tau_0 = 0 \text{ et } \tau_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i.$$

On rappelle que

(i) F est un champ de vecteurs localement lipschitzien et complet, (U_n) une suite d'accroissements de martingales, et (γ_n) une suite positive déterministe telle que $\gamma_n \rightarrow 0$ et $\tau_n \rightarrow \infty$.

On suppose de plus que

(ii) (X_n) est presque sûrement bornée ;
 (iii) une des deux conditions suivantes est vérifiée

(a)

$$\sup_n \mathbb{E}(\|U_n\|^2) < \infty \text{ et } \sum \gamma_n^2 < \infty$$

ou

(b) il existe $\Gamma > 0$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{E}(\exp(\langle \theta, U_{n+1} \rangle | \mathcal{F}_n)) \leq \exp\left(\frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2\right) \text{ et } \sum_n e^{-c/\gamma_n} < \infty.$$

Alors \mathbf{x} est presque sûrement une P.T.A. du flot Φ induit par F .

DÉMONSTRATION :

Introduisons l'application "inverse" de $n \rightarrow \tau_n$, notée $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ et définie par

$$m(t) = \sup\{k \geq 0 : t \geq \tau_k\}.$$

Soient les processus à temps continu, $\bar{U}, \bar{X}, \bar{\gamma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ définis par

$$\bar{U}(\tau_n + s) = U_{n+1}, \bar{X}(\tau_n + s) = X_{n+1}, \bar{\gamma}(\tau_n + s) = \gamma_{n+1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < \gamma_{n+1}$. Avec ces notations l'algorithme (5.5) peut être réécrit sous la forme

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t [F(\bar{X}(s)) + \bar{U}(s)] ds. \quad (5.9)$$

Nous allons prouver le théorème 5.3.5 en deux étapes. La première étape, de nature probabiliste, consistera à montrer que l'hypothèse (iii) du théorème entraîne que pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t, T) = 0 \text{ p.s.} \quad (5.10)$$

avec

$$\Delta(t, T) = \sup_{0 \leq h \leq T} \left\| \int_t^{t+h} \bar{U}(s) ds \right\|.$$

La seconde étape, purement déterministe, consistera à prouver que, sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème, la condition (5.10) fait de \mathbf{x} une P.T.A. du flot ϕ induit par F .

Preuve de l'étape 1 : remarquons tout d'abord que la condition (5.10) est équivalente à la condition suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| : k = n+1, \dots, m(\tau_n + T) \right\} = 0 \text{ p.s.} \quad (5.11)$$

Sous l'hypothèse (iii) (a), la martingale $M_n = \sum_i \gamma_i U_i$ converge p.s. par application du théorème 4.3.3. La condition (5.11) est donc clairement satisfaite.

Nous passons maintenant à la preuve de (5.11) sous l'hypothèse (iii) (b). Soit, pour $\theta \in \mathbb{R}^m$,

$$Z_n(\theta) = \exp \left[\sum_{i=1}^n \langle \theta, \gamma_i U_i \rangle - \frac{\Gamma}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \|\theta\|^2 \right], \quad n \geq 1.$$

De la première partie de l'hypothèse (iii), (b) on déduit que la suite $\{Z_n(\theta)\}$ est une surmartingale. Donc, par application de l'inégalité maximale (i) du théorème 4.5.1 (voir la section 4.5 "pour en savoir plus" du chapitre 4), pour tout $\beta > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{n < k \leq m(\tau_n + T)} \left\langle \theta, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \beta \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{n < k \leq m(\tau_n + T)} Z_k(\theta) \geq Z_n(\theta) \exp \left(\beta - \frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2 \sum_{i=n}^{m(\tau_n + T) - 1} \gamma_{i+1}^2 \right) \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2 \sum_{i=n}^{m(\tau_n + T) - 1} \gamma_{i+1}^2 - \beta \right). \end{aligned}$$

Soient e_1, \dots, e_m les éléments de la base canonique de \mathbb{R}^m , $\alpha > 0$, $e \in \{e_1, \dots, e_m\} \cup \{-e_1, \dots, -e_m\}$,

$$R = \frac{\alpha}{\Gamma \sum_{i=n}^{m(\tau_n + T) - 1} \gamma_{i+1}^2},$$

$\beta = R\alpha$ et $\theta = Re$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{n < k \leq m(\tau_n + T)} \left\langle e, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \alpha \right) &= \mathbf{P} \left(\sup_{n < k \leq m(\tau_n + T)} \left\langle \theta, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \beta \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{-\alpha^2}{2\Gamma \sum_{i=n}^{m(\tau_n + T) - 1} \gamma_{i+1}^2} \right). \end{aligned}$$

Ceci montre qu'alors

$$\mathbf{P}(\Delta(t, T) \geq \alpha) \leq C \exp\left(\frac{-\alpha^2}{C' \int_t^{t+T} \bar{\gamma}(s) ds}\right) \leq C \exp\left(\frac{-\alpha^2}{C' T \bar{\gamma}(t)}\right)$$

pour des constantes $C, C' > 0$ dépendantes de m (la dimension de \mathbb{R}^m) et de Γ .

D'où

$$\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(\Delta(kT, T) \geq \alpha) < \infty$$

d'après la seconde partie de l'hypothèse (iii) (b), et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(kT, T) = 0 \text{ p.s.}$$

par application du lemme de Borel-Cantelli. Par ailleurs, pour $kT \leq t < (k+1)T$,

$$\Delta(t, T) \leq 2\Delta(kT, T) + \Delta((k+1)T, T).$$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t, T) = 0 \text{ p.s.}$$

Preuve de l'étape 2 : réécrivons (5.9) sous la forme

$$\mathbf{x}(t+s) - \mathbf{x}(t) = \int_0^s F(\mathbf{x}(t+u)) du + A_t(s) + B_t(s) \tag{5.12}$$

où

$$A_t(s) = \int_t^{t+s} [F(\bar{X}(u)) - F(\mathbf{x}(u))] du,$$

et

$$B_t(s) = \int_t^{t+s} \bar{U}(u) du.$$

Soit L la constante de Lipschitz de F sur un voisinage compact des trajectoires $t \rightarrow \mathbf{x}(t), \bar{X}(t)$. Alors, d'après (5.12),

$$\|\mathbf{x}(t+s) - \Phi_s(\mathbf{x}(t))\| \leq L \int_0^s \|\mathbf{x}(t+u) - \Phi_u(\mathbf{x}(t))\| du + \|A_t(s)\| + \|B_t(s)\|.$$

Par l'inégalité de Gronwall, on en déduit que

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|\mathbf{x}(t+s) - \Phi_s(\mathbf{x}(t))\| \leq e^{LT} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} (\|A_t(s)\| + \|B_t(s)\|) \right). \quad (5.13)$$

Par ailleurs,

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|B_t(s)\| \leq \Delta(t-1, T+1), \quad (5.14)$$

et

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|A_t(s)\| \leq LT \sup_{t \leq u \leq t+T} \|\mathbf{x}(u) - \bar{X}(u)\|. \quad (5.15)$$

D'après (5.9),

$$\|\mathbf{x}(u) - \bar{X}(u)\| = \left\| \int_{\tau_{m(u)}}^u F(\bar{X}(s)) + \bar{U}(s) ds \right\| \leq K\bar{\gamma}(u) + \left\| \int_{\tau_{m(u)}}^u \bar{U}(s) ds \right\|$$

où K désigne un majorant de $\|F(\bar{X}(s))\|$. Comme pour t assez grand, $\bar{\gamma}(u) < 1$,

$$\left\| \int_{\tau_{m(u)}}^u \bar{U}(s) ds \right\| \leq \left\| \int_{t-1}^{\tau_{m(u)}} \bar{U}(s) ds \right\| + \left\| \int_{t-1}^u \bar{U}(s) ds \right\| \leq 2\Delta(t-1, T+1).$$

Ainsi

$$\sup_{t \leq u \leq t+T} \|\mathbf{x}(u) - \bar{X}(u)\| \leq 2\Delta(t-1, T+1) + \sup_{t \leq u \leq t+T} K\bar{\gamma}(u),$$

et donc, d'après (5.15),

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|A_t(s)\| \leq LT(2\Delta(t-1, T+1) + \sup_{t \leq s \leq t+T} \bar{\gamma}(s)K). \quad (5.16)$$

Les inégalités (5.14), (5.16) combinées avec l'inégalité de Gronwall (5.13) et l'étape 1 permettent de conclure.

Exercice 5.3.6 Soit (U_n) une suite d'accroissements de martingale uniformément bornée (i.e. $\sup_n \|U_n\| \leq C$). Montrer qu'alors la condition (iii) (b) du théorème 5.3.5 est vérifiée. On pourra étudier la fonction $\theta \rightarrow \ln(\mathbb{E}(\exp(\langle \theta, U_{n+1} \rangle) | \mathcal{F}_n))$.

Dynamique des P.T.A.

Nous allons établir ici quelques propriétés des P.T.A. Au vu du théorème 5.3.5, ces propriétés se traduisent en des propriétés presque sûres des solutions de (5.5). Pour une analyse plus approfondie, on pourra consulter [38].

Soit \mathbf{x} une P.T.A. du flot Φ . L'ensemble limite de \mathbf{x} est l'ensemble

$$L(\mathbf{x}) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\mathbf{x}(s) : s \geq t\}}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'un point p est élément de $L(\mathbf{x})$ si et seulement si il existe une suite croissante $t_n \rightarrow \infty$ telle que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n)$. L'ensemble $L(\mathbf{x})$ caractérise donc le comportement asymptotique de \mathbf{x} .

Lemme 5.3.7 *Soit \mathbf{x} une P.T.A. bornée (i.e. $\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$) du flot Φ . Alors l'ensemble $L = L(\mathbf{x})$ est non vide, compact, connexe et invariant par Φ , c'est-à-dire*

$$\Phi_t(L) = L, \forall t \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION :

L'ensemble L est non vide et compact car \mathbf{x} est bornée. Pour montrer la connexité supposons, au contraire, qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $L \subset U \cap V$, $L \cap U \neq \emptyset$ et $L \cap V \neq \emptyset$. La courbe $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ rencontre alors infiniment souvent chacun des ensembles U et V et donc aussi l'ensemble $(U \cup V)^c$ par continuité. Comme $(U \cup V)^c$ est fermé, L rencontre $(U \cup V)^c$. Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Soit $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_n)$ un élément de L et $T \geq 0$. Alors

$$\Phi_T(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_T(\mathbf{x}(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t_n + T))$$

par continuité de Φ_T et propriété de P.T.A. Donc $\Phi_T(p) \in L$.

Toujours par propriété de P.T.A.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_T(\mathbf{x}(t_n - T)) - \mathbf{x}(t_n)\| = 0.$$

D'où $p = \Phi_T(q)$ avec $q = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t_n - T)) \in L$. Donc $\Phi_{-T}(p) \in L$.

Exemple 5.3.8 (Urnes de Polya et standardisation, (iii)). Supposons que la fonction p (équation (5.6)) ait un unique point fixe x^* . Alors le "portrait de phase" du flot Φ est donné par le schéma suivant

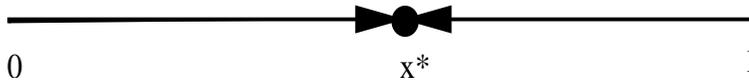


Figure 5.2 *Portrait de phase de l'EDO associée à (5.7) avec $F^{-1}(0) = \{x^*\}$.*

Le singleton $\{x^*\}$ est le seul ensemble compact connexe et invariant par Φ , d'où l'on déduit, par application du théorème 5.3.5 et du lemme 5.3.7 que $X_n \rightarrow x^*$ p.s.

Exercice 5.3.9 (Dosage, (ii)). On suppose (pour simplifier) que la fonction f de l'exemple 5.3.3 est lipschitzienne, tend vers l'infini en l'infini (i.e. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$), et que les variables $U_{n+1} = Z_{n+1} - f(X_n)$ sont uniformément bornées (i.e. $\sup_n |U_n| \leq M < \infty$). Montrer qu'alors la suite (X_n) est bornée et en déduire que $X_n \rightarrow x^*$ avec $f(x^*) = a$ pour un choix convenable des γ_n .

Le lemme 5.3.7, bien que très utile dans les deux exemples précédents, n'est plus suffisant pour analyser le comportement asymptotique de la suite (X_n) du bandit à deux bras. En effet, dans cet exemple, le champ de vecteurs (5.8) admet deux équilibres 0 et 1 (sous l'hypothèse $\theta_A \neq \theta_B$).

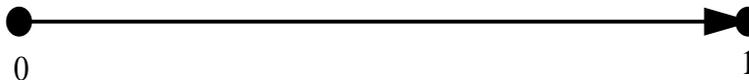


Figure 5.3 *Portrait de phase de l'EDO associée à (5.8) avec $\theta_A > \theta_B$.*

Les ensembles compacts connexes et invariants sont donc les singletons $\{0\}, \{1\}$ et l'intervalle $[0, 1]$. Le résultat de la section suivante permettra d'éliminer $[0, 1]$ comme ensemble limite possible de (x_n) .

Fonctions de Lyapounov

Soit $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 . On dit que V est une *fonction de Lyapounov stricte* pour F si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\langle \nabla V(x), F(x) \rangle \leq 0$$

et

$$\langle \nabla V(x), F(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0.$$

Théorème 5.3.10 *On suppose que l'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^m : F(x) = 0\}$ des équilibres de F est constitué de points isolés, et qu'il existe une fonction de Lyapounov stricte pour F . Alors, pour tout \mathbf{x} P.T.A. bornée du flot induit par F , il existe $p \in \mathcal{E}$ tel*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = p.$$

DÉMONSTRATION :

Notons K un voisinage compact (par exemple une boule fermée) de la trajectoire $\{\mathbf{x}(t) : t \geq 0\}$ et V une fonction de Lyapounov stricte pour F .

Pour tout voisinage U de $\mathcal{E} \cap K$, il existe, par hypothèse sur V , $\delta(U) > 0$ tel que

$$\forall x \in K \setminus U, \langle \nabla V(x), F(x) \rangle \leq -\delta(U).$$

– Montrons d'abord que pour tout $1 > \epsilon > 0$, il existe t assez grand tel que $\forall b \geq a + \epsilon > a \geq t$

$$\mathbf{x}([a, b]) \subset K \setminus U \Rightarrow V(\mathbf{x}(b)) - V(\mathbf{x}(a)) \leq -\frac{\delta(U)}{2}(b - a). \quad (5.17)$$

La division euclidienne de $(b - a)$ par 1 donne $b - a = k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < 1$. Posons $\tau = 1 + r/k$ si $k \geq 1$ et $\tau = (b - a)$ sinon. Remarquons qu'alors $\epsilon \leq \tau \leq 2$. Par propriété de P.T.A. et continuité uniforme de V sur tout compact, il existe t assez grand tel que

$$V(\mathbf{x}(a + (i + 1)\tau)) - V(\Phi_\tau(\mathbf{x}(a + i\tau))) \leq \frac{\delta(U)\epsilon}{4} \leq \frac{\delta(U)\tau}{4}$$

pour $a \geq t$. Soit $\tilde{U} \subset U$ un voisinage de $K \cap \mathcal{E}$ tel que

$$\forall x \in K \setminus \tilde{U}, \langle \nabla V, F \rangle \leq -\frac{3}{4}\delta(U).$$

Comme $\mathbf{x}([a, b]) \subset K \setminus U$, on peut de plus supposer (toujours par propriété de P.T.A.) que $\Phi_s(\mathbf{x}(a + i\tau)) \subset K \setminus \tilde{U}$ pour tout $0 \leq s \leq \tau$. D'où l'on déduit que

$$V(\Phi_\tau(\mathbf{x}(a + i\tau))) - V(\mathbf{x}(a + i\tau)) = \int_0^\tau \frac{d}{ds} V(\Phi_s(\mathbf{x}(a + i\tau))) ds \leq -\frac{3}{4}\delta(U)\tau.$$

Et donc, par inégalité triangulaire,

$$V(\mathbf{x}(a + (i + 1)\tau)) - V(\mathbf{x}(a + i\tau)) \leq -\frac{\delta(U)\tau}{2}.$$

En sommant cette dernière inégalité pour $i = 0, \dots, k - 1$, on prouve ainsi (5.17).

– De (5.17) on déduit que $L(\mathbf{x}) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, car sinon il existerait U voisinage de \mathcal{E} et

$t > 0$ tels que $\mathbf{x}(s) \in U$ pour tout $s \geq t$. Mais alors (5.17) impliquerait $\inf_K V = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t)) = -\infty$ ce qui n'est pas possible par compacité de K .

– Il nous reste maintenant à prouver que $L(\mathbf{x}) \subset \mathcal{E}$. Supposons au contraire qu'il existe $p_0 \in L(\mathbf{x}) \cap \mathcal{E}^c$. Notons p_1, \dots, p_n les éléments de $\mathcal{E} \cap K$ et $U_i(r), i = 0, \dots, n$ la boule de centre p_i et de rayon $r > 0$. Fixons r assez petit de sorte que les $U_i(r)$ soient deux à deux disjoints et posons alors $U_i = U_i(r), U = \bigcup_{i=0}^n U_i(r)$ et $\delta = \delta(U)$. En utilisant la continuité du flot et la définition d'une P.T.A., on déduit qu'il existe $T > 0$ et t assez grand tels que $\forall b > a > t$ et $i \neq j$

$$\mathbf{x}(a) \in U_i \text{ et } \mathbf{x}(b) \in U_j \Rightarrow (b - a) \geq T. \quad (5.18)$$

Choisissons maintenant $r' < r$ tel que sur $U'_i = U_i(r')$

$$|V(x) - V(y)| \leq \frac{T\delta}{4}. \quad (5.19)$$

Comme $p_0 \in L(\mathbf{x})$ et $L(\mathbf{x})$ rencontre \mathcal{E} , on peut définir deux suites (t_n) et (i_n) par

$$\begin{aligned} t_0 &= \inf \left\{ s > t : \mathbf{x}(s) \in U' = \bigcup_i U'_i \right\}, \\ i_0 &= i \Leftrightarrow \mathbf{x}(t_0) \in U'_i, \\ t_{n+1} &= \inf \{ s > t_n : \mathbf{x}(s) \in U' \setminus U'_{i_n} \}, \\ i_{n+1} &= i \Leftrightarrow \mathbf{x}(t_n) \in U'_i. \end{aligned}$$

Introduisons les instants intermédiaires

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sup \{ s \in [t_n, t_{n+1}[: \mathbf{x}(s) \in U'_{i_n} \}, \\ a_n &= \sup \{ s \in [t_n, t_{n+1}[: \mathbf{x}(s) \in U_{i_n} \}, \end{aligned}$$

et

$$b_n = \inf \{ s \in [t_n, t_{n+1}[: \mathbf{x}(s) \in U_{i_{n+1}} \}.$$

En utilisant (5.17), (5.18) et (5.19), il vient

$$\begin{aligned} &V(\mathbf{x}(t_{n+1})) - V(\mathbf{x}(t_n)) = \\ &[V(\mathbf{x}(t_{n+1})) - V(\mathbf{x}(b_n))] + [V(\mathbf{x}(b_n)) - V(\mathbf{x}(a_n))] + [V(\mathbf{x}(a_n)) - V(\mathbf{x}(\alpha_n))] + [V(\mathbf{x}(\alpha_n)) - V(\mathbf{x}(t_n))] \\ &\leq -\frac{\delta'(t_{n+1} - b_n)}{2} - \frac{\delta T}{2} - \frac{\delta'(a_n - \alpha_n)}{2} + \frac{\delta T}{4} \leq -\frac{\delta T}{4}. \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t_n)) = -\infty$. Ce qui contredit la compacité de K .

Exemple 5.3.11 (Bandit à deux bras, (ii)). Soit $V(x) = -\int_0^x F(u) du$ où F est le champ de vecteurs donné par (5.8). Alors V est une fonction de Lyapounov stricte pour F car $\langle \nabla V, F \rangle = -F^2$. Sous l'hypothèse $\theta_A \neq \theta_B$ les équilibres de F sont

les deux points 0 et 1. Donc si (γ_n) vérifie la condition (iii) (b) du théorème 5.3.5, (X_n) converge p.s. vers 0 ou 1. Ceci montre que la procédure d'apprentissage conduit le joueur à toujours jouer le même bras. On peut par ailleurs prouver (en utilisant l'exercice 5.3.14) que le meilleur des bras a une probabilité positive d'être choisi et que (sous certaines hypothèses sur (γ_n)), le mauvais bras a une probabilité nulle d'être choisi (voir [51]).

Remarque 5.3.12 L'argument utilisé ici pour montrer que le champ de vecteurs du bandit à deux bras admet une fonction de Lyapounov stricte est valable pour tout champ de vecteurs en dimension 1. En fait, les champs de vecteurs uni-dimensionnels sont tous des champs de gradient.

Exemple 5.3.13 (Apprentissage supervisé). Une *machine paramétrée* est une fonction régulière

$$M : E \times P \rightarrow S,$$

$$x \rightarrow M(x, w) = M_w(x),$$

où E, S, P sont des ouverts d'espaces euclidiens appelés respectivement *espace d'entrées*, *espace de sorties* et *espace de paramètres*. La fonction M caractérise l'architecture de la machine et le vecteur w est un ensemble de paramètres modifiables.

Un exemple maintenant classique de telle machine est celui des *réseaux de neurones formels*. Un réseau de neurones formels à d entrées, k sorties, 0 couche cachée, et *matrice synaptique* $\theta = (\theta_{ij})_{i=1, \dots, k, j=0, \dots, n}$ est une fonction

$$T_\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$x \rightarrow (T_{\theta,1}(x), \dots, T_{\theta,k}(x))$$

de la forme

$$T_{\theta,i}(x) = S \left(\sum_{j=1}^n \theta_{ij} x_j - \theta_{i0} \right)$$

où S est une fonction "sigmoïdale" qui approche la fonction signe. Par exemple

$$S(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}.$$

L'interprétation "neuronale" est la suivante (voir la figure 5.5) : d neurones situés sur une couche d'entrée sont connectés à k neurones situés sur une couche de sortie.

L'intensité de la connexion entre le j^{e} neurone de la couche d'entrée et le i^{e} neurone de sortie est mesurée par un "poids synaptique" θ_{ij} . Le signal d'entrée x_j s'interprète comme "l'état d'activation" du j^{e} neurone de la couche d'entrée et $T_{\theta,i}(x)$ comme la réponse ou l'activité du i^{e} neurone de sortie. Le coefficient θ_{i0} , quant à lui, représente le "seuil d'activation" du neurone i . Si la somme pondérée des activités reçues par le neurone i est suffisamment supérieure (respectivement inférieure) à θ_{i0} le neurone i est actif *i.e.* $T_{\theta,i}(x) \sim 1$; (respectivement inactif *i.e.* $T_{\theta,i}(x) \sim -1$).

Si la couche de sortie du réseau précédemment décrit est utilisée comme couche d'entrée d'un réseau à k entrées, 0 couche cachée, et m sorties, noté $T_{\bar{\theta}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$; la fonction obtenue $T_{\bar{\theta}} \circ T_{\theta}$ représente alors un réseau à d entrées, n sorties et 1 couche cachée de k neurones. En composant de tels réseaux on construit ainsi des réseaux à couches cachées. L'intérêt des réseaux à couches cachées provient du fait qu'ils constituent des approximateurs universels, c'est-à-dire que toute fonction $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, et disons à support compact, peut être uniformément approchée par un réseau à couches cachées (voir White [31]).

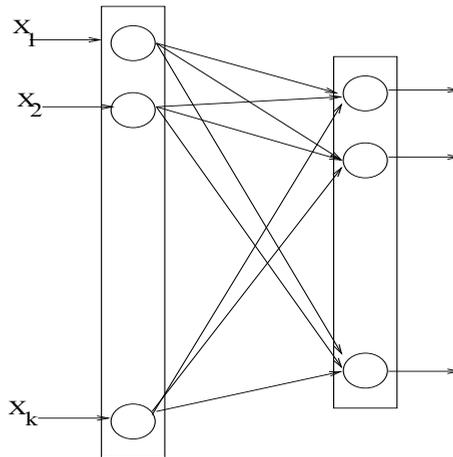


Figure 5.4 Réseau de neurones sans couche cachée.

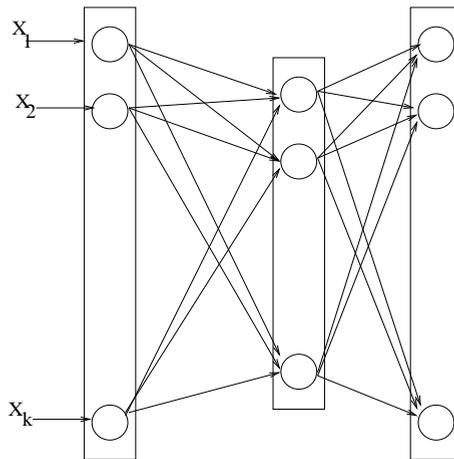


Figure 5.5 Réseau de neurones avec une couche cachée.

La problématique de *l'apprentissage supervisé* est la suivante. Soit μ une loi sur $E \times S$, dont on observe une suite i.i.d. de réalisations $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots\}$ constituant une *base d'apprentissage*. L'apprentissage consiste à modifier progressivement les paramètres w de sorte que si (\tilde{X}, \tilde{Y}) est une réalisation de μ (non nécessairement choisie dans la base d'apprentissage) et si l'entrée \tilde{X} est présentée à la machine, la sortie $M_w(\tilde{X})$ soit proche de la sortie désirée \tilde{Y} . Pour fixer les idées, on peut imaginer que \tilde{X} représente une image (par exemple une lettre manuscrite, une photo de visage, etc.) et \tilde{Y} un code associé à cette image (la lettre correspondante dans l'alphabet, un type (Homme, Femme, Enfant) associé au visage, etc.)

On se donne une fonction $c : E \times S \times \mathbb{R}$ qui mesure l'écart entre $M_w(x)$ et y . Par exemple

$$c(x, y, w) = \|y - M_w(x)\|^2.$$

On définit une suite récursive de paramètres en posant

$$w_{n+1} - w_n = -\gamma_{n+1} f(X_{n+1}, Y_{n+1}, w_n) \quad (5.20)$$

où

$$f(x, y, w) = \frac{\partial c}{\partial w}(x, y, w)$$

et (γ_n) est une suite positive vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.5. Soit

$$C(w) = \int_{E \times S} c(x, y, w) d\mu(x, y)$$

l'erreur globale moyenne entre la sortie de la machine et la sortie désirée. Alors $C(w) = \mathbb{E}(c(X_n, Y_n, w))$ et (en supposant vérifiées les conditions d'application du théorème de dérivabilité sous le signe \int),

$$\nabla C(w) = \mathbb{E}(f(X_n, Y_n, w)).$$

Par conséquent, la variable

$$U_{n+1} = f(X_{n+1}, Y_{n+1}, w_n) - \nabla C(w_n)$$

est un accroissement de martingale et l'algorithme (5.20) est donc de la forme (5.5) avec

$$F(w) = -\nabla C(w).$$

La fonction C est une fonction de Lyapounov stricte pour L'EDO associée et, en s'appuyant sur le théorème 5.3.10, on peut ainsi montrer que la suite (w_n) définie par (5.20) converge presque sûrement vers un point critique de C . Par ailleurs, avec quelques hypothèses supplémentaires raisonnables, il est possible de prouver que (w_n) converge en fait vers un minimum local de C . L'algorithme (5.20) permet donc de minimiser (au moins localement) le critère d'erreur globale C .

Exercice 5.3.14 Un équilibre p de F est dit *asymptotiquement stable* si il existe un voisinage U de p tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists T > 0 : \forall t \geq T, \Phi_t(U) \subset B(p, \epsilon).$$

Soit (X_n) solution de (5.5), p un équilibre asymptotiquement stable de F . Montrer que, sous les hypothèses du théorème 5.3.5

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = p | X_m \in U) > 0.$$

Appliquer ce résultat au modèle d'adoption de technologie (exemple 5.3.1) et au bandit à deux bras (exemple 5.3.2).

Chapitre 6

Stratégies, temps d'arrêt et optimisation

La possibilité de s'arrêter ou de repartir à un temps aléatoire sans modifier fondamentalement les propriétés markoviennes ou “martingaliennes” des suites aléatoires considérées donne à la théorie des martingales toute sa puissance.

Les jeux de hasard fournissent un très grand nombre d'exemples d'application de cette propriété. Il est raisonnable de “culminer” sur la théorie de l'arrêt optimal, qui définit quelle règle utiliser si on cherche à s'arrêter au bon moment. Le chapitre suivant développe en détail l'exemple des mathématiques financières, domaine grand utilisateur de martingales, stratégies et autres outils.

6.1 Stratégies et temps d'arrêt

6.1.1 La roulette

Les jeux de casino sont des exemples typiques de jeux de hasard, dans lesquels la stratégie du joueur semble avoir de l'importance. Passons quelques instants à décrire le jeu de la roulette.

Les règles de la roulette Le tapis de roulette se compose de 37 numéros répartis en 3 colonnes de 12 numéros pour les numéros de 1 à 36, le zéro étant placé en haut du tapis sur la largeur des trois colonnes. De chaque côté du tapis se trouvent les "chances simples" qui sont : rouge, noir, pair, impair, manque, passe.

Différents paris de rapports variables sont possibles¹. Nous nous attacherons plus spécialement aux stratégies suivantes :

- le numéro en "plein" : on mise sur un seul numéro. Le rapport est de 35 fois la mise ;
- les chances simples, par exemple le rouge. Le rapport est d'une fois la mise ;
- le rôle particulier du 0 :

Les paris sont perdants lors de la sortie du zéro, sauf bien sûr si on a misé sur 0.

Pour les paris placés sur les chances simples, la sortie du zéro entraîne un cas particulier, que l'on illustre sur un exemple :

On mise sur le rouge ; le zéro sort. La mise sur le rouge est "enfermée". Au coup suivant, si le rouge sort, la mise est libérée et est remise en jeu. Sinon, elle est perdue. Lorsque la mise est "enfermée", on peut soit la laisser enfermée et attendre l'issue au tour suivant, soit réclamer la moitié de sa mise immédiatement.

Soit A l'ensemble des actions possibles. Les règles du jeu que nous venons d'évoquer peuvent se représenter par une fonction de gain

$$g : A \times \{0, \dots, 36\} \rightarrow \mathbb{R},$$

¹À titre d'information, nous en donnons la liste.

- le numéro en "plein" : on mise sur un seul numéro. Le rapport est de 35 fois la mise ;
 - deux numéros à cheval : on place une pièce entre deux numéros, le rapport est de 17 fois la mise ;
 - le "carré" , un pièce au milieu d'un carré de quatre numéros, un rapport de 8 et beaucoup d'autres configurations, dont le "sizain" à cheval sur deux lignes de trois (rapport de 5), la "douzaine", on parie sur une des trois douzaines, avec un rapport de 2...
 - les chances simples :
 - rouge : tous les numéros qui figurent en rouge sur le tapis,
 - noir : tous les numéros qui figurent en noir
 - pair : tous les numéros pairs,
 - impairs : tous les numéros impairs,
 - manque : les numéros de 1 à 18
 - passe les numéros de 19 à 36
- Le rapport est d'une fois la mise.

où $g(a, y)$ est la valeur du gain associée à une mise de 1 sur l'action a et au résultat y . Ainsi

$$g(\text{miser en plein sur } x, y) = 35\mathbf{1}_{\{y=x\}} - \mathbf{1}_{\{y \neq x\}}$$

et

$$g(\text{miser sur rouge}, y) = \mathbf{1}_{\{y \text{ est rouge}\}} - \mathbf{1}_{\{y \text{ n'est pas rouge}\}}$$

si on exclut le zéro. Si on prend en compte le rôle particulier du zéro et qu'on décide de réclamer sa mise systématiquement, alors le gain est plus favorable

$$g(\text{miser sur rouge}, y) = \mathbf{1}_{\{y \text{ est rouge}\}} - \mathbf{1}_{\{y \text{ n'est pas rouge et } y \neq 0\}} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{y=0\}}.$$

Le gain moyen Pour estimer le gain moyen d'une stratégie, nous introduisons la suite de variables aléatoires i.i.d. (Y_1, \dots, Y_n) , de loi uniforme sur $\{0, \dots, 36\}$, représentant les numéros obtenus par le croupier, et calculons l'espérance de la fonction de gain.

Exemple 6.1.1 L'action "*miser en plein*" sur un numéro gagne 35 si le numéro est choisi et perd 1 sinon, soit un gain moyen pour une mise de 1 de

$$V_{\text{plein}} = E(g(\text{miser en plein sur } x, Y_n)) = 35\frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$$

compte-tenu du fait que 37 numéros peuvent sortir.

L'action "*miser sur rouge*" ne gagne que dans 18 cas sur 37, si on exclut le zéro et perd 1 dans les autres cas.

$$V_{\text{rouge}}^1 = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}.$$

Si on prend en compte le rôle particulier du zéro et qu'on décide de réclamer sa mise systématiquement, alors le gain est plus favorable

$$V_{\text{rouge}}^2 = \frac{18}{37} - \frac{18}{37} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2 \times 37}.$$

Miser sur plein, ou miser sur rouge, conduit à un jeu perdant en moyenne. Une question naturelle est de voir si on peut définir des stratégies meilleures.

Les stratégies Précisons la notion de stratégie. Avant le n -ième tirage un joueur dispose des jetons sur le tapis. Notons $\phi_n(a)$ la "mise" choisie par le joueur sur l'action a et

$$\phi_n = (\phi_n(a))_{a \in A}.$$

Par exemple, si le joueur décide de miser 10 unités sur le zéro et 5 sur la couleur rouge à l'étape n alors

$$\phi_n(\text{miser sur rouge}) = 5, \phi_n(\text{miser sur } 0) = 10,$$

et $\phi_n(a) = 0$ pour les autres actions. Le processus $\phi = (\phi_n)_{n \geq 1}$ s'appelle une *stratégie*. C'est un processus prévisible au sens où la mise à l'instant n est choisie en fonction de $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ seulement.

Le gain du joueur après n parties est la variable $X_n(\phi)$ définie par $X_0(\phi) = 0$ et

$$X_n(\phi) = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, g(Y_i) \rangle$$

pour $n \geq 1$ où

$$\langle \phi_i, g(Y_i) \rangle = \sum_a \phi_i(a) g(a, Y_i).$$

Nous venons de voir que les règles du casino sont ainsi faites que pour toute action a

$$E(g(a, Y_n)) \leq 0.$$

Ainsi, puisque Y_{n+1} est indépendante de \mathcal{F}_n et donc aussi de ϕ_{n+1}

$$E(X_{n+1}(\phi) - X_n(\phi) | \mathcal{F}_n) = E(\langle \phi_{n+1}, g(Y_{n+1}) \rangle | \mathcal{F}_n) = \sum_a \phi_{n+1}(a) E(g(a, Y_{n+1})) \leq 0.$$

$\{X_n(\phi)\}$ est donc une **sur-martingale**. Pour toute stratégie, le jeu reste perdant en moyenne.

6.1.2 Stratégies et martingales

Nous venons de décrire les stratégies du jeu de la roulette. Les mêmes idées peuvent être développées dans le cadre plus général de la théorie des martingales. En particulier, aucune stratégie ne peut transformer un jeu défavorable (sur-martingale) en un jeu équitable, et réciproquement.

Proposition 6.1.2 *Soit (X_n) un processus adapté intégrable, représentant les gains cumulés obtenus lors d'un jeu de hasard. Une stratégie (ϕ_n) est une suite prévisible ($\phi_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ si $n \geq 1$, et ϕ_0 constant). Le gain au jeu obtenu au bout de n parties en suivant la stratégie ϕ est la v.a.*

$$X_n(\phi) = \phi_0 X_0 + \phi_1(X_1 - X_0) + \cdots + \phi_n(X_n - X_{n-1}).$$

Si (X_n) est une martingale (resp. sous-sur-martingale), il en est de même de $X_n(\phi)$ pour toute stratégie bornée (resp. bornée positive). De plus, une condition nécessaire et suffisante pour que (X_n) soit une martingale (resp. sous-sur-martingale) est que pour toute stratégie bornée et positive ϕ , et pour tout n

$$\mathbb{E}(X_n(\phi)) = \mathbb{E}(X_0(\phi)) \quad (\geq, \leq). \quad (6.1)$$

DÉMONSTRATION :
 \Rightarrow Calculons

$$\mathbb{E}(X_{n+1}(\phi) - X_n(\phi) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\phi_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) = \phi_{n+1} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n).$$

Nous avons utilisé le fait que ϕ_{n+1} était \mathcal{F}_n -mesurable pour le sortir de l'espérance conditionnelle. La première partie de la proposition suit immédiatement en distinguant le cas martingale où il n'est pas nécessaire de faire intervenir le signe de la stratégie.

\Rightarrow Seule la réciproque demande quelque justification. Il s'agit donc de montrer comment une propriété vraie en espérance pour toute stratégie bornée positive implique une propriété de l'espérance conditionnelle.

Soit $A \in \mathcal{F}_n$ et ϕ la stratégie définie par

$$\phi(k) = 0, \quad \text{si } k \neq n+1, \quad \phi(n+1) = 1_A.$$

Par la condition (6.1)

$$\mathbb{E}(1_A(X_{n+1} - X_n)) = 0 \quad (\geq, \leq).$$

Puisque cette condition est vraie pour tout A de \mathcal{F}_n , cela implique une condition sur l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0 \quad (\geq, \leq).$$

6.1.3 Temps d'arrêt

Parmi ces stratégies, les plus simples sont celles qui consistent à choisir le moment où on commence à jouer et celui où on s'arrête. Évidemment, le choix de ces instants

ne peut se faire qu'au vu de ce qui a été observé au moment où on prend la décision, ce qui conduit naturellement à la notion de temps d'arrêt.

Définition 6.1.3 *Un temps d'arrêt (noté t.a.) est une variable aléatoire*

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

En termes de stratégie, une v.a. T est un t.a. si la suite $\{a^T(n) = \mathbf{1}_{]0, T[}(n)\}_{n \geq 0}$ est une stratégie.

DÉMONSTRATION :

Pour l'équivalence, il suffit de remarquer que $\{a^T(n) = 0\} = \{n > T\}$ est \mathcal{F}_{n-1} mesurable, si et seulement si T est un t.a.

Nous avons déjà utilisé de nombreuses fois les temps d'entrée.

Exemple 6.1.4 (Temps d'entrée dans un ensemble). Soit $X = (X_n)$ un processus adapté à \mathcal{F} à valeurs dans un ensemble E et $D \in \mathcal{E}$. Alors $T_D = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in D\}$ (avec la convention habituelle que l'inf du vide est $+\infty$) est un temps d'arrêt, appelé le temps d'atteinte de D . Le premier temps de sortie de D , $\sigma_D = T_{D^c}$ qui est le temps d'entrée dans le complémentaire de D est aussi un t.a.

$$\begin{aligned} \{T_D = n\} &= \{X_0 \notin D, X_1 \notin D, \dots, X_{n-1} \notin D, X_n \in D, \} \\ \{\sigma_D = n\} &= \{X_0 \in D, X_1 \in D, \dots, X_{n-1} \in D, X_n \notin D\} \end{aligned}$$

Propriétés Soit T un t.a.

- (i) $\{T \leq n\} = \cup_{i \leq n} \{T = i\} \in \mathcal{F}_n$;
- (ii) $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$;
- (iii) $\{T = \infty\} = \bigcap_n \{T > n\} \in \mathcal{F}_\infty$;
- (iv) soient T_1, T_2 des temps d'arrêt. Alors $\inf(T_1, T_2)$ et $\sup(T_1, T_2)$ sont des temps d'arrêt. Si $\{T_n\}$ est une suite croissante (décroissante) de temps d'arrêt alors $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ est un temps d'arrêt.

Définition 6.1.5 La tribu des événements antérieurs à T (notée \mathcal{F}_T) est la tribu des événements $A \in \mathcal{F}_\infty$ tels que

$$A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Les v.a. \mathcal{F}_T -mesurables sont de la forme X_T , où X est un processus adapté.

DÉMONSTRATION :

Montrons la caractérisation des v.a. \mathcal{F}_T -mesurables. Il est clair que si X est adapté, $X_T \mathbf{1}_{\{T=n\}} = X_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est \mathcal{F}_n -mesurable. Réciproquement, si Z est \mathcal{F}_T -mesurable, $X_n = Z \mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est \mathcal{F}_n -mesurable. La suite (X_n) est donc un processus adapté dont la valeur au temps aléatoire T est égale à Z . Il est clair que cette représentation n'est pas unique.

6.2 Théorème d'arrêt et applications

6.2.1 Théorème d'arrêt

Théorème 6.2.1 (Théorème d'arrêt de Doob). Soit X une sous-martingale (martingale) et T un temps d'arrêt. Alors

- (i) $(X_{n \wedge T})_n$ est une sous-martingale (martingale) ;
- (ii) si S est un autre temps d'arrêt et $N \in \mathbb{N}$ une constante tels que $T \leq S \leq N$ alors $E(X_S | \mathcal{F}_T) \geq (=) X_T$;
- (iii) soit T un t.a. borné. La suite $(X_{\sup(n,T)})_n$ est une sous-martingale (martingale) par rapport à la filtration $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\sup(n,T)}$. C'est la sous-martingale qui part à l'instant aléatoire T .

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow i) Considérons la stratégie a^T qui vaut 1, si $n \leq T$ et 0 sinon. Par construction $X_n(a^T) = X_{n \wedge T}$. C'est le processus X_n arrêté à l'instant T qui hérite donc des propriétés de X_n , d'après la proposition 6.1.2.

\Rightarrow ii) Soit A un élément de \mathcal{F}_T et ϕ_A la stratégie $\phi_A(n) = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T < n \leq S\}}$ (on commence à jouer après T et seulement si A est réalisé, et on s'arrête en S). La valeur en N du processus $X(\phi_A)$ est $X_N(\phi_A) = \mathbf{1}_A(X_S - X_T)$. La proposition (6.1.2) nous assure que

$$E(X_N(\phi_A)) = E(\mathbf{1}_A(X_S - X_T)) (\geq, =) E(X_0(\phi_A)) = 0.$$

Comme ces inégalités sont vraies pour tout A de \mathcal{F}_T , la propriété des espérances conditionnelles en découle.

⇒ iii) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente aux t.a. bornés $\sup(n, T)$ et $\sup(n + p, T)$.

Le corollaire suivant est immédiat (et souvent utile), notamment dans la théorie des chaînes de Markov.

Corollaire 6.2.2 *Soit (M_n) un processus adapté, intégrable. (M_n) est une martingale (sous-martingale) si et seulement si pour tout t.a. T borné*

$$\mathbf{E}(M_T) = (\geq)\mathbf{E}(M_0).$$

DÉMONSTRATION :

⇒ Si M est une martingale, la propriété est une simple application du théorème d'arrêt de Doob.

⇒ Pour la réciproque, il suffit de considérer un t.a. défini de la manière suivante. Soit $A \in \mathcal{F}_t$, et $T = t + h$ sur A , t sur A^c . On a alors une description simple de $M_T = M_t + \mathbf{1}_A(M_{t+h} - M_t)$. Par hypothèse, $\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_t)$ et donc $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A(M_{t+h} - M_t)) = 0$, ce qui caractérise M comme martingale.

6.2.2 Applications du théorème d'arrêt

La ruine du joueur

Les fluctuations d'un jeu sont souvent décrites par une suite (Y_n) de variables indépendantes égales à $+1$ ou à -1 ($+1$ pour un succès, -1 pour un échec). Le nombre de points gagnés après n parties est donc $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. On suppose $\mathbf{P}(Y_n = +1) = p$, $\mathbf{P}(Y_n = -1) = q$, ($p + q = 1$) et on pose $S_0 = 0$. Le gain du joueur est donc modélisable par la promenade aléatoire sur \mathbb{Z} . C'est une chaîne de Markov. Comme les v.a. Y_i sont indépendantes, il est facile de vérifier que les suites

$$M_n = (q/p)^{S_n} \quad \text{et} \quad W_n = S_n - n(2p - 1)$$

sont des martingales. Ainsi, par application du théorème d'arrêt, pour tout temps d'arrêt T borné.

$$\mathbf{E} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^{S_T} \right] = 1, \quad \mathbf{E}[S_T] = (2p - 1)\mathbf{E}(T). \quad (6.2)$$

Proposition 6.2.3 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ la fortune initiale du joueur et $b > a$ la fortune que le joueur souhaite atteindre. Le premier temps de sortie de $] -a, b[$

$$\sigma_{a,b} = \inf\{n : S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$$

représente le moment où le jeu s'arrête. Alors

- (i) $\sigma_{a,b}$ est un temps d'arrêt fini p.s. ;
(ii) si $p \neq q$, la probabilité de ruine $r = P(S_{\sigma_{a,b}} = -a; \sigma_{a,b} < +\infty)$ est égale à

$$r = \frac{1 - (q/p)^b}{(p/q)^a - (q/p)^b},$$

et si $p = q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{b}{a+b}$;

- (iii) le temps moyen de jeu est pour $p \neq q$,

$$E(\sigma_{a,b}) = \frac{1}{p-q}(b - r(a+b)),$$

et pour $p = q = \frac{1}{2}$, $E(\sigma_{a,b}) = ab$.

Remarque 6.2.4 Remarquons que lorsque $b \rightarrow \infty$ (imprudent joueur!), pour $p < 1/2$ $r \rightarrow 1$, par contre si $p > 1/2$, $r \rightarrow (q/p)^a$.

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow La suite $S_{\sigma_{a,b} \wedge M}$ est bornée par $\sup(|a|, |b|)$. En appliquant (6.2) à $\sigma_{a,b} \wedge M$, on voit que pour tout M , $\sup(|a|, |b|) \geq (2p-1)E(\sigma_{a,b} \wedge M)$. On en déduit grâce au théorème de convergence monotone que si $p \neq \frac{1}{2}$, $\nu_{a,b}$ est fini p.s. La suite $S_{\sigma_{a,b} \wedge M}$ converge donc p.s. vers $S_{\sigma_{a,b}}$ et par le théorème de convergence dominée, (6.2) est vraie pour $\sigma_{a,b}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on utilise la martingale $V_n = S_n^2 - n$ et on fait exactement le même raisonnement. Par suite $\sigma_{a,b}$ est aussi fini dans ce cas et (6.2) vaut pour $\sigma_{a,b}$.

\Rightarrow À l'instant $\sigma_{a,b}$, puisque $\sigma_{a,b} < +\infty$ p.s., le joueur est ruiné ($S_{\sigma_{a,b}} = -a$) ou gagnant ($S_{\sigma_{a,b}} = b$) p.s. Il reste à calculer la probabilité de ruine $r = P(S_{\sigma_{a,b}} = -a)$. On refait la même distinction. Si $p \neq q$, on peut utiliser (6.2) appliqué à $\sigma_{a,b}$ pour montrer que

$$1 = (q/p)^{-a}r + (q/p)^b(1-r)$$

et

$$E(\sigma_{a,b})(2p-1) = -ar + (1-r)b.$$

D'où on déduit que $r = \frac{1 - (q/p)^b}{(p/q)^a - (q/p)^b}$.

Si $p = q = \frac{1}{2}$, on utilise les martingales S_n et $(S_n)^2 - n$, pour en déduire que

$$\mathbb{E}(S_{\sigma_{a,b}}) = 0 = ar + b(1 - r), \quad \mathbb{E}(S_{\sigma_{a,b}}^2 - \sigma_{a,b}) = 0.$$

On en déduit que $r = \frac{b}{a+b}$, et que $\mathbb{E}(\sigma_{a,b}) = a^2r + b^2(1 - r) = ab$.

⇒ Si le joueur a un objectif de gain infini, ($b \rightarrow \infty$) la probabilité de perte $r \rightarrow 1$ et $\mathbb{E}(\sigma_{a,b}) \rightarrow \infty$.

Comme conséquence des calculs effectués ci-dessus, nous retrouvons le théorème classique suivant (déjà établi dans la section 2.3).

Théorème 6.2.5 (i) *Pour $p \neq q$ la marche aléatoire S_n est transiente.*

(ii) *Pour $p = q = 1/2$ la marche aléatoire S_n est récurrente nulle.*

L'exercice suivant permet de préciser la loi du temps de ruine du joueur.

Exercice 6.2.6 On suppose $p \leq 1/2$, et on note $T = \nu_{a,\infty} = \inf\{n \geq 0 : S_n = -a\}$. Montrer que la transformée de Laplace de T est donnée par

$$\mathbb{E}(\exp(-\alpha T)) = \exp(-af(\alpha))$$

où f est la fonction réciproque de la fonction

$$g(\beta) = \ln(\mathbb{E}(\exp(-\beta Y_1))) = \ln(pe^{-\beta} + qe^{\beta}).$$

On pourra introduire $M_n = \exp(-\beta S_n - ng(\beta))$ et remarquer que M_n est une martingale.

Les techniques de martingale utilisées ici se généralisent aisément aux sommes de v.a. indépendantes.

Proposition 6.2.7 (Identité de Wald). *Soit (Y_n) une suite de v.a. indépendantes, intégrables, de même loi et T un temps d'arrêt intégrable.*

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ la somme des Y_i

$$\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(Y_1).$$

Si les v.a. sont de carré intégrable,

$$\text{Var}(S_T) = \mathbb{E}(T)\text{Var}(Y_1).$$

Remarque 6.2.8 Tout se passe en moyenne comme si le t.a. T était indépendant de la suite (Y_n) . Ceci est assez étonnant, puisque si par exemple $T = \inf\{n; Y_n \geq K\}$ (supposé fini p.s.), la loi conditionnelle de (Y_1, \dots, Y_{n-1}) sachant que $\{T = n\}$ est celle de v.a. i.i.d. indépendantes de loi, la loi de Y_1 sachant que $\{Y_1 \leq K\}$, dont la moyenne est différente de celle de Y_1 . Mais évidemment à l'étape n on obtient quelque chose qui est plus grand que K et les choses vont se compenser en moyenne.

DÉMONSTRATION :

Notons m l'espérance de Y_1 .

$\Rightarrow Z_n = S_n - nm$ est une martingale, à laquelle on peut appliquer le théorème d'arrêt, pour la suite de t.a. bornés $\inf(T, k)$

$$E(S_{T \wedge k}) = E(T \wedge k)E(Y_1).$$

Il reste à passer à la limite dans ces expressions. Si les v.a. Y_i sont positives, la suite S_n est croissante, positive, et le passage à la limite monotone est justifié. Dans le cas général, on applique le résultat à Y^+ et Y^- .

\Rightarrow Si les v.a. sont de carré intégrable, $\Delta Z_n = Y_n - E(Y_n)$ et $E((\Delta Z_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \text{Var}(Y_n) = \text{Var}(Y_1)$. La suite $(Z_n^2 - \text{Var}(Y_1)n)$ est une martingale. Le théorème d'arrêt entraîne que

$$E(Z_{n \wedge T}^2) = \text{Var}(Y_1)E(n \wedge T),$$

Le passage à la limite se fait de la même façon que ci-dessus.

Exercice 6.2.9 Soit (Y_n) une suite de v.a. i.i.d. de Log transformée de Laplace, définie pour u réel par

$$\Phi(u) = \ln E(\exp(uY_1)).$$

$\Phi(u)$ peut prendre la valeur $+\infty$, mais pas $-\infty$, et $\Phi(0) = 0$.

Par l'inégalité de Hölder, la fonction Φ est strictement convexe, et l'ensemble $\{\Phi(u) < +\infty\}$, appelé domaine de Φ , est un intervalle à l'intérieur duquel Φ est indéfiniment dérivable.

1) Montrer pour tout u tel que $\Phi(u) < +\infty$

$$Z_n(u) = \exp(uS_n - n\Phi(u))$$

est une martingale d'espérance 1, qui converge p.s. vers 0 si $u \neq 0$

2) Si 0 appartient à l'intérieur du domaine de Φ , montrer que les dérivées successives en 0 de $Z_n(u)$ sont des martingales.

Retrouver les résultats du jeu de pile ou face.

6.2.3 N'espérez pas gagner au casino !

Reprenons l'exemple 6.1.1 du joueur jouant à la roulette. Une *stratégie* pour le joueur est la donnée d'un processus prévisible $\{\phi_n\}$ (la suite des mises du joueur) et d'un temps d'arrêt T . Une stratégie raisonnable est une stratégie telle que $E(T) < \infty$. Une conséquence du théorème d'arrêt est qu'il n'existe aucune stratégie raisonnable gagnante. La raison en est que les mises autorisées par le casino ont des valeurs bornées. Soit K la valeur maximale autorisée par le casino. Alors

$$|X_{n \wedge T}(\phi)| \leq T \sup_a |g(a, Y_i)| \leq 35KT.$$

Donc par application du théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{n \wedge T}(\phi)) = E(X_T(\phi)).$$

D'où $E(X_T(\phi)) \leq 0$ car $E(X_{n \wedge T}(\phi)) \leq E(X_0(\phi)) = 0$ où cette dernière inégalité provient du théorème d'arrêt.

Quitte ou double

Sans cette contrainte, il existe des stratégies gagnantes. En voici une bien connue. Considérons la stratégie qui consiste à toujours parier sur rouge en doublant sa mise à chaque étape. Quel le meilleur moment pour s'arrêter ?

– Nous avons vu que si nous nous fixons un horizon de jeu fini, alors toutes les stratégies sont perdantes.

– Nous décidons de jouer jusqu'à l'obtention du rouge puis à sortir du jeu à l'apparition du rouge.

Soit m_1 la mise initiale sur le rouge et $T = \inf\{k \geq 1 : X_k \text{ est rouge}\}$. Alors $P(T = n) = (1/2 + 1/37)^{n-1}(1/2 - 1/37)$ et la stratégie est raisonnable puisque

$$E(T) = 2 \times 37/35 < \infty.$$

À l'instant T , le gain du joueur est un gain certain, strictement positif car,

$$X_T(\phi)(\omega) = m_1 \left(- \sum_{i=1}^{T(\omega)-1} 2^{i-1} + 2^{T(\omega)-1} \right) = m_1 > 0!$$

Remarque 6.2.10 Le temps d'arrêt T est fini, mais non borné et le processus représentant les gains du jeu n'est pas uniformément intégrable. Par suite le théorème d'arrêt est mis en défaut.

6.3 Martingales, temps d'arrêt et chaînes de Markov

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace dénombrable M . Les v.a. sont définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ est la tribu canonique du passé de X jusqu'à l'instant n . Nous adopterons les notations de la section 2.1.3, où le symbole \mathbb{P}_x désigne par convention la probabilité \mathbb{P} conditionnée par l'événement $\{X_0 = x\}$.

Propriété de Markov

La propriété de Markov d'indépendance du passé et du futur étant donné le présent, se traduit par le fait que pour toute fonction $f : M^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ = \mathbb{E}(f(x_n, X_1, \dots, X_k) | X_0 = x_n) = \mathbb{E}_{x_n}(f(X_0, X_1, \dots, X_k)) \end{aligned}$$

Cette propriété peut être étendue à des fonctions Φ boréliennes (c'est-à-dire mesurables par rapport à la tribu produit sur $M^{\mathbb{N}}$ positives ou bornées dépendant de toute la trajectoire comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 2 (section 2.1.3),

$$\mathbb{E}(\Phi((X_{n+k})_{k \geq 0}) | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{E}_{x_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})) \tag{6.3}$$

Nous pouvons également exprimer cette propriété en utilisant le symbole d'espérance conditionnelle.

Proposition 6.3.1

$$\mathbb{E}(\Phi((X_{n+k})_{k \geq 0}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})). \tag{6.4}$$

DÉMONSTRATION :

La tribu \mathcal{F}_n est engendrée par les événements de la forme $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Phi((X_{n+k})_{k \geq 0}); \{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}) \\ = \mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \mathbb{E}_{x_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})) \\ = \mathbb{E}(\mathbb{E}_{X_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})); X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n). \end{aligned}$$

L'égalité des deux dernières lignes est l'expression de la propriété de Markov simple. La dernière ligne est obtenue en remplaçant X_n par sa valeur sur l'ensemble d'intégration. Comme $\mathbb{E}_{X_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0}))$ est \mathcal{F}_n -mesurable, l'égalité des espérances nous donne celle des espérances conditionnelles.

Propriété de Markov forte

Considérons maintenant T un t.a. L'égalité

$$\{A \cap \{T = n\} : A \in \mathcal{F}_T\} = \{A \cap \{T = n\} : A \in \mathcal{F}_n\}$$

entraîne immédiatement que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Phi((X_{T+k})_{k \geq 0}) | \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_{\{T=n\}} &= \mathbb{E}(\Phi((X_{n+k})_{k \geq 0}) | \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_{\{T=n\}} \\ &= \mathbb{E}_{X_n}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})) \mathbf{1}_{\{T=n\}} = \mathbb{E}_{X_T}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})) \mathbf{1}_{\{T=n\}}. \end{aligned}$$

En d'autres termes,

Théorème 6.3.2 *Pour tout t.a. T et toute fonction Φ borélienne positive ou bornée,*

$$\mathbb{E}(\Phi((X_{T+k})_{k \geq 0}) | \mathcal{F}_T) \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}} = \mathbb{E}_{X_T}(\Phi((X_k)_{k \geq 0})) \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}. \quad (6.5)$$

Nous pouvons formuler ce résultat d'une manière plus imagée. Supposons que T soit un temps d'arrêt fini p.s., quelque soit le point de départ.

La chaîne $(X_n^T = X_{T+n})$ est une chaîne de Markov par rapport à \mathcal{F}_{T+n} de même noyau de transition P , mais de loi initiale $P_{X_T}(dy)$ distribution de X_T .

Conditionnellement par rapport à X_T , la chaîne est indépendante de \mathcal{F}_T .

Corollaire 6.3.3 *Soit T_y le premier temps d'atteinte de y .*

Sur l'ensemble $\{T_y < +\infty\}$, la chaîne $(X_n^{T_y} = X_{T_y+n})$ part de y à l'instant 0, et est indépendante de \mathcal{F}_{T_y} . La loi conditionnelle de la chaîne $(X_n^{T_y} = X_{T_y+n})$ sachant que $\{T_y < +\infty\}$ est la probabilité \mathbb{P}_y .

6.3.1 Martingales et chaînes de Markov

L'essentiel des résultats de cette section n'utilise pas le fait que l'espace d'états M est dénombrable, sauf pour les questions de mesurabilité.

Soit f une fonction telle que pour tout n , $f(X_n)$ soit intégrable. D'après la décomposition de Doob (proposition 4.2.9), la suite se décompose en la somme d'une martingale M_n et d'un processus prévisible intégrable I_n tels que

$$f(X_n) = f(X_0) + M_n + I_n,$$

$$\Delta I_n = \mathbb{E}(f(X_n) - f(X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) = Pf(X_{n-1}) - f(X_{n-1}) \tag{6.6}$$

$$\Delta M_n = f(X_n) - Pf(X_{n-1}) \tag{6.7}$$

Cette décomposition met en évidence que les propriétés de "martingales" de la suite $f(X_n)$ sont étroitement liées aux propriétés de la fonction Pf.

Définition 6.3.4 Une fonction positive finie f est **surharmonique** si

$$\forall x \in M, Pf(x) \leq f(x).$$

Si A est une partie de M (borélienne si M est non dénombrable), f est **surharmonique sur A** si

$$\forall x \in A, Pf(x) \leq f(x).$$

Proposition 6.3.5 Soit f une fonction surharmonique finie. Pour toutes les probabilités \mathbb{P}_x ($x \in M$), $f(X_n)$ est une sur-martingale positive, de processus croissant prévisible $A_n = \sum_{k=1}^n (f(X_{k-1}) - Pf(X_{k-1}))$.

DÉMONSTRATION :

Montrons que $\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(Pf(X_{n-1})) \leq \mathbb{E}(f(X_{n-1}))$ est une suite positive décroissante et donc finie p.s. Or ces inégalités sont justifiées, puisque f étant positive toutes ces inégalités ont un sens.

Par ailleurs, le processus prévisible I_n de la décomposition a des variations négatives. Il est donc décroissant et la suite $(f(X_n))$ est une sur-martingale.

Potentiels et matrice potentielle

Parmi les fonctions surharmoniques, celles qui sont engendrées par la matrice potentielle jouent un rôle spécifique.

On appelle **matrice potentielle** de X (ou de P) la matrice G définie par

$$G = I + P + P^2 + \dots + P^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} P^k,$$

c'est-à-dire

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(x, y) \in [0, \infty].$$

Pour toute fonction positive f , on note Gf la fonction définie par

$$Gf(x) = \sum_y G(x, y)f(y).$$

Par convergence monotone, on a aussi

$$Gf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k f(x).$$

Définition 6.3.6 *Si f est une fonction positive telle que Gf soit finie partout, Gf est une fonction surharmonique positive, appelée **potentiel** de f .²*

DÉMONSTRATION :

La matrice potentielle vérifie

$$G = I + P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P^k \right) = I + PG \quad (6.8)$$

On en déduit aisément que $P(Gf) \leq Gf$.

Proposition 6.3.7 (Décomposition de Riesz). *Chaque fonction surharmonique positive et finie f peut se décomposer comme la somme d'une fonction harmonique positive h et d'un potentiel Gg , soit*

$$f = h + Gg.$$

Les fonctions h et g de cette décomposition sont uniquement déterminées par les relations $h = \lim_n \downarrow P^n f$ et $g = f - Pf$.

De plus, pour chaque probabilité \mathbb{P}_x , $\lim_n f(X_n)$ et $\lim_n h(X_n)$ existent p.s. et sont égales.

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow Posons $g = f - Pf$, ce qui a du sens car f et donc Pf sont finies. De plus, $\sum_{k=0}^{n-1} P^k g = f - P^n f$. Comme g est positive puisque f est surharmonique, on peut passer à la limite dans le membre de gauche de cette équation, et obtenir la fonction Gg .

²La suite de cette section est largement inspirée du livre de Neveu [23].

- ⇒ La suite $P^n f$ est décroissante car f est surharmonique positive et sa limite positive h est une fonction harmonique, car $h = \lim_n \downarrow P^n f = \lim_n \downarrow P^{n+1} f = Ph$.
- ⇒ L'unicité résulte du caractère nécessaire de la construction.
- ⇒ Pour chaque probabilité \mathbb{P}_x , les suites $f(X_n)$, $Gg(X_n)$, $h(X_n)$ sont des surmartingales positives qui admettent une limite p.s. à l'infini. Pour montrer l'égalité des limites, il suffit de démontrer que la limite p.s. de $Gg(X_n)$ est 0. Or

$$\mathbb{E}_x(Gg(X_n)) = P^n Gg(x) = \sum_{m \geq n} P^m g(x)$$

tend vers 0 puisque la série est convergente ($Gg(x) < +\infty$).
 La suite $Gg(X_n)$ converge dans \mathbb{L}^1 vers 0. Il existe donc une sous-suite qui converge p.s. vers 0, qui est donc la valeur de la limite de la suite complète.

Grâce à ce résultat, nous pouvons retrouver les principaux résultats sur la récurrence des chaînes de Markov dénombrables.

Proposition 6.3.8 *La probabilité d'atteinte d'un ensemble D par une chaîne de Markov, c'est-à-dire la fonction*

$$e_D(x) = \mathbb{P}_x(T_D < +\infty) = \mathbb{P}_x(\exists k, X_k \in D)$$

est une fonction surharmonique, comprise entre 0 et 1. Sa composante harmonique vaut

$$h_D(x) = \mathbb{P}_x(N_D = +\infty),$$

où N_D désigne le nombre de visites de la chaîne à l'ensemble D . De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_D(X_n) = \mathbf{1}_{\{N_D = +\infty\}}.$$

La fonction g_D de la décomposition de Riesz de e_D , définie par $e_D = h_D + Gg_D$ vaut

$$\begin{aligned} g_D(x) &= \mathbb{P}_x(X_n \notin D, \forall n \geq 1) \quad \text{si } x \in D \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin D. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

- ⇒ Par la propriété de Markov, $P^n e_D(x) = \mathbb{P}_x(\exists k \geq n, X_k \in D)$. La suite des événements $\{\exists k \geq n, X_k \in D\} = \bigcup_{k \geq n} \{X_k \in D\}$ converge en décroissant vers l'événement $\{N_D = +\infty\} = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} \{X_k \in D\}$. Par monotonie, ce résultat passe aux probabilités.

⇒ Il reste à étudier la limite à l'infini de la suite $h_D(X_n)$. Mais par construction, prenant en compte que l'événement : "le nombre de visite à D après n est infini" ne dépend pas de n , et la propriété de Markov, il vient que $h_D(X_n) = \mathbb{P}_{X_n}(N_D = +\infty) = \mathbb{P}(N_D = +\infty | \mathcal{F}_n)$ est une martingale bornée, qui converge donc p.s. et dans \mathbb{L}^1 vers sa variable terminale.

⇒ Pour le dernier point, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} e_D(x) - Pe_D(x) &= \mathbb{P}_x(\exists k, X_k \in D) - \mathbb{P}_x(\exists k \geq 1, X_k \in D) \\ &= \mathbb{P}_x(X_0 \in D, \forall k \geq 1, X_k \notin D) \end{aligned}$$

Proposition 6.3.9 *Un sous-ensemble D est dit transient si pour tout x de M*

$$\mathbb{P}_x(N_D = +\infty) = 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble D soit transient est qu'il existe un potentiel Gg tel que $Gg \geq 1$ sur D . De plus la fonction g peut toujours être prise nulle en dehors de D .

DÉMONSTRATION :

La condition est suffisante, car d'après la décomposition de Riesz, la limite de la suite $Gg(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ est égale à 0. Mais l'inégalité $Gg(X_n) \geq \mathbf{1}_D(X_n)$ entraîne qu'il en est de même de la limsup de la suite $\mathbf{1}_D(X_n)$. L'événement $\limsup\{X_n \in D\}$ est donc de probabilité nulle pour toute probabilité \mathbb{P}_x . Mais cet événement est exactement l'ensemble $\{N_D = +\infty\}$, comme nous l'avons vu dans la preuve précédente. Réciproquement, si D est transient, la composante harmonique de la fonction sur-harmonique e_D est nulle. Par suite d'après le théorème de Riesz, e_D est un potentiel positif et égal à 1 sur D .

En appliquant ce résultat à un point, on retrouve la classification des états que nous avons démontrée au chapitre 2 dans la section 2.3.

Proposition 6.3.10 *Pour tout état $x \in M$, la fonction $e_x (= e_{\{x\}})$ est soit un potentiel, soit une fonction harmonique. Si e_x est un potentiel, l'état x est transient, c'est-à-dire que*

$$\forall y \in M, \mathbb{P}_y(N_x = +\infty) = 0.$$

Si e_x est une fonction harmonique, l'état x est récurrent, c'est-à-dire que

$$\forall y \in M, \mathbb{P}_y(N_x = +\infty) = 1.$$

Partant d'un état récurrent x , on a seulement deux possibilités pour un autre état y :

- soit $N_y = 0$ \mathbb{P}_x p.s. ;
- soit $N_y = +\infty$ \mathbb{P}_x p.s. Notons C_x l'ensemble de tels états. Alors tout y de C_x est récurrent et $C_x = C_y$. L'ensemble C_x s'appelle la **classe de récurrence** de x .

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow L'observation suivante est fondamentale. Soit f une fonction surharmonique positive finie. La limite de la sur-martingale $f(X_n)$ à l'infini est égale à $f(x)$, \mathbb{P}_x p.s sur l'ensemble $\{N_x = +\infty\}$, car sur cet ensemble, il existe une infinité de n tel que $f(X_n) = f(x)$. Par suite, il existe une sous-suite qui converge vers $f(x)$. Comme la suite est convergente, $f(x)$ est donc la limite de la suite entière.

\Rightarrow Soit x un état récurrent, et y un point tel que $h_x(y) = \mathbb{P}_y(N_x = +\infty) \neq 0$. La martingale positive $h_x(X_n)$ converge p.s. vers $\mathbf{1}_{\{N_x = +\infty\}}$. D'après la remarque ci-dessus, sur l'ensemble $\{N_x = +\infty\}$, la limite est aussi égale à $h_x(x)$. Nous avons donc montré que $h_x(x) = 1$. Il reste à utiliser la décomposition de e_x pour déduire que $g_x(x) = 0$ et donc partout puisque par construction g_x est nulle en dehors de x .

\Rightarrow Soit toujours x un état récurrent. Sous la probabilité \mathbb{P}_x , la sur-martingale $e_y(X_n)$ converge p.s. vers $\mathbf{1}_{\{N_y = +\infty\}}$, mais qui d'après la première assertion de la preuve vaut aussi $e_y(x)$. Cette fonction vaut donc soit 0, soit 1. Et de plus si $e_y(x) = 0$, $\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 0$ et si $e_y(x) = 1$, $\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 1$.

\Rightarrow Si $y \in C_x$, la fonction h_y qui n'est pas identiquement nulle vaut 1 au point x . Par les résultats ci-dessus, cela entraîne que x est récurrent. Si de plus $z \in C_x$, d'après la remarque préliminaire de la preuve, $h_z(X_n)$ converge \mathbb{P}_x -p.s. vers $\mathbf{1}_{\{N_z = +\infty\}} = 1$, qui est égal à $h_z(y)$ puisque $\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 1$. Par suite $h_z(y) = 1$, ce qui signifie que $z \in C_y$. On démontre évidemment de même que si $z \in C_y \Rightarrow z \in C_x$.

En utilisant la matrice potentielle, on a un énoncé un peu plus classique. Si on note que $G(x, y) = G(\mathbf{1}_y)x = E_x(N_y)$ où N_y est le nombre de visites à l'état y , il vient :

Corollaire 6.3.11 *Soit X une chaîne de Markov irréductible. Alors*

- (i) *soit pour tout (x, y) , $G(x, y) < +\infty$, tous les états sont transients et la chaîne est dite transiente ;*
- (ii) *soit pour tout (x, y) , $G(x, y) = +\infty$, tous les états sont récurrents et la chaîne est dite récurrente ;*
- (iii) *(critère de récurrence) la chaîne est récurrente si et seulement si les seules fonctions surharmoniques sont les constantes.*

DÉMONSTRATION :

- \Rightarrow Par irréductibilité, le caractère fini ou infini de $G(x, y)$ ne dépend pas du couple (x, y) comme nous l'avons déjà montré dans la preuve de la proposition 2.3.10.
 \Rightarrow Si $G(x, y) = \infty$, la proposition 6.3.9 montre qu'il n'existe aucun état transient. Les états sont donc récurrents. Si $G(x, y) < \infty$, la fonction $g = \mathbf{1}_y$ vérifie $Gg(y) \geq 1$ et y est donc transient, toujours par application de la proposition 6.3.9.
 \Rightarrow Si la chaîne est transiente, la fonction e_x est surharmonique (proposition 6.3.10) et non constante car elle vaut 1 en x et est < 1 ailleurs. Si la chaîne est récurrente, l'observation faite au début de la preuve de la proposition 6.3.10 montre que toute fonction surharmonique est constante.

Exemple 6.3.12 (Chaîne de vie et de mort, (ii)). Nous revenons ici sur l'exemple 2.3.23 introduit dans la section 2.3. du chapitre 2. On considère la chaîne de Markov (X_n) à valeurs dans \mathbb{N} de transition Q

$$Q(x, x-1) = q_x \quad Q(x, x+1) = p_x \quad Q(x, x) = r_x \quad p_x + q_x + r_x = 1.$$

On suppose que $p_x > 0$ pour tout $x \geq 0$, $q_x > 0$ pour tout $x \geq 1$ et $q_0 = 0$. Notons $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_x = \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x}.$$

Soit, avec les notations de l'exemple 2.3.23,

$$\gamma_x = \frac{p_0}{p_x \lambda_x}.$$

Pour $x \geq 1$, nous notons $u(0) = 0$, et $u(x) = \sum_{i=1}^{x-1} \gamma_i$.

Alors la fonction u est harmonique sur $\mathbb{N} - \{0\}$, c'est à dire que $Qu(x) = u(x)$.

Pour tout $a < b \in \mathbb{N}^*$, notons $T_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$ et $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$.

Supposons $X_0 = x \in [a, b]$. Alors le processus $(u(X_{n \wedge T_{a,b}}))$ est une martingale et en raisonnant comme dans l'exemple 6.2.2, nous obtenons

$$P(T_{a,b} = T_a) = \frac{u(x) - u(b)}{u(a) - u(b)}.$$

Par ailleurs, $\{T_0 = \infty\} = \{\forall n : T_{0,n} = T_n\}$. D'où

$$P(T_0 < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(T(0, n) = T_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} u(x)/u(n).$$

Nous avons obtenu un critère de récurrence qui complète le résultat prouvé dans l'exemple 2.3.23,

Théorème 6.3.13 *La chaîne (X_n) est récurrente si et seulement si*

$$\sum_{i \geq 1} \gamma_i = \infty.$$

6.3.2 Problèmes de Cauchy et de Dirichlet pour les chaînes de Markov dénombrables

Nous nous intéressons au calcul numérique des fonctions qui jouent un grand rôle dans les applications, comme $E_x(f(X_n))$ ou la fonction potentielle Gf .

Problème de Cauchy

Donnons-nous un horizon fini T et une chaîne de Markov (X_n) dénombrable de matrice de transition P sur $M \times M$.

Définition 6.3.14 Une fonction $u(k, x)$ est solution du problème de Cauchy, de condition terminale f si elle vérifie

$$(P - I)u(k, \cdot)(x) + u(k, x) - u(k - 1, x) = 0, \quad u(T, x) = f(x) \tag{6.9}$$

ou de manière plus explicite, $u(k, \cdot)$ satisfait la relation de récurrence rétrograde,

$$u(k - 1, x) = \sum_{y \in M} P(x, y)u(k, y), \quad u(T, x) = f(x).$$

Remarque 6.3.15 La différence $u(k, x) - u(k - 1, x)$ peut être interprétée comme une dérivée discrète en temps. L'opérateur $P - I$ représente une sorte de variation moyenne en espace le long des trajectoires. La résolution du problème de Dirichlet pour le laplacien que nous présentons ci-dessous illustre ces idées.

La deuxième formulation montre que, dans le cas où l'espace M est fini, la donnée de la condition terminale suffit à définir la suite par récurrence rétrograde et que la solution est donnée par

$$u(k, x) = P^{T-k}f(x) = E(f(X_T)|X_k = x). \tag{6.10}$$

Dans le cas où l'espace est dénombrable, on résout la deuxième équation pour $|f|$, et lorsque la solution est finie en tout point on reprend le problème avec f en étant sûr de construire une solution finie en tout point.

Plus généralement, si $E(f(X_T) + \sum_{k+1}^T g(n - 1, X_{n-1})|X_k = x) = v(k, x)$, où f et g sont suffisamment intégrables, alors v vérifie

$$(P - I)(v(k, \cdot)(x) - g(k - 1, x) + (v(k, x) - v(k - 1, x))) = 0, \quad v(T, x) = f(x) \tag{6.11}$$

Lorsque l'horizon est infini, on n'a plus de condition terminale, toutefois on a la proposition suivante.

Proposition 6.3.16 *Pour $f \geq 0$, Gf est la plus petite solution positive de l'équation*

$$v = f + Pv \quad (6.12)$$

En particulier, pour tout $y \in M$, $G(x, y) = G(\mathbf{1}_y)(x)$ est la plus petite solution positive de l'équation

$$v(y) = 1 + Pv(y), \quad v(x) = Pv(x) \quad x \neq y.$$

Cette dernière propriété peut permettre de fournir un moyen de calculer la matrice potentielle.

DÉMONSTRATION :

Il est clair que Gf est solution, (éventuellement infinie en certains points) de l'équation (6.12). Considérons une autre solution positive v . Clairement $v \geq f$. Prenons cette inégalité comme point de départ d'une hypothèse de récurrence de type $v \geq \sum_{k=0}^n P^k f$. Par les propriétés de v , cela entraîne que

$$v = f + Pv \geq f + P \left(\sum_{k=0}^n P^k f \right) = \sum_{k=0}^{n+1} P^k f.$$

L'hypothèse de récurrence est satisfaite. En passant à la limite, on vérifie que $v \geq Gf$.

Distribution de sortie et problème de Dirichlet

Soient (X_n) une chaîne de Markov de noyau de transition P et D un domaine de M . Rappelons que le premier temps de sortie de D , $\sigma_D = T_{D^c}$ est un t.a. qui vérifie $\{\sigma_D = n\} = \{X_0 \in D, X_1 \in D, \dots, X_{n-1} \in D, X_n \notin D\}$. Nous avons beaucoup étudié la fonction surharmonique e_{D^c} . Plus généralement, nous nous intéresserons à la distribution de sortie de D , c'est-à-dire à la matrice sous-markovienne

$$P_D(x, y) = \mathbb{P}_x(X_{\sigma_D} = y; \sigma_D < \infty),$$

et aux fonctions

$$P_D f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{\sigma_D}) \mathbf{1}_{\{\sigma_D < \infty\}}).$$

Il est naturel d'introduire la frontière de D , comme

$$\partial_P D = \{y \in M \setminus D, \quad \exists x \in D, P(x, y) > 0\}$$

Proposition 6.3.17 *Soit f une fonction positive telle que $f(x)$ et $Pf(x)$ soient finies pour tout x . Alors*

- (i) *si f est surharmonique sur D , $(f(X_{n \wedge \sigma_D}))_{n \geq 0}$ est une sur-martingale positive ;*
- (ii) *si f est harmonique sur D , $(f(X_{n \wedge \sigma_D}))_{n \geq 0}$ est une martingale. Si cette martingale est uniformément intégrable,*

$$f(X_{n \wedge \sigma_D}) = \mathbb{E}(f(X_{\sigma_D}) | \mathcal{F}_{n \wedge \sigma_D}) = \mathbb{E}_{X_{n \wedge \sigma_D}}(f(X_{\sigma_D})) = P_D f(X_{n \wedge \sigma_D}) ;$$

- (iii) *soit D un domaine tel que pour tout $x \in D$, σ_D soit fini \mathbb{P}_x p.s., pour toute fonction h bornée définie sur $\partial_P D$, $P_D h = f$ est une fonction harmonique dans D .*

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow Considérons la décomposition de Doob de la suite positive $f(X_{n \wedge \sigma_D})$, en

$$\begin{aligned} f(X_{n \wedge \sigma_D}) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{i \leq \sigma_D\}} (f(X_i) - f(X_{i-1})) \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{i \leq \sigma_D\}} (Pf(X_{i-1}) - f(X_{i-1})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{i \leq \sigma_D\}} (f(X_i) - Pf(X_{i-1})) \end{aligned}$$

Comme f est surharmonique sur D , $Pf(X_{i-1}) \leq f(X_{i-1})$ pour $i \leq \sigma_D$, et le terme de la deuxième ligne est négatif. C'est un processus décroissant. Le terme de la troisième ligne est la martingale $(M_n(a^{\sigma_D}))$ déduite de la martingale M_n de variation $f(X_n) - Pf(X_{n-1})$ par la stratégie $a^{\sigma_D} = \mathbf{1}_{]0, \sigma_D]}$.

\Rightarrow Montrons que $P_D h$ est harmonique sur D . Pour cela, nous partons d'un point $x \in D$ et calculons $P(P_D h)(x)$. Par la propriété de Markov que nous utiliserons dans le passage de la première à la deuxième ligne,

$$\begin{aligned} P(P_D h)(x) &= \mathbb{E}_x(P_D h(X_1)) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{X_1}(h(X_{\sigma_D}))\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(\Phi((X_{p+1})_{p \geq 0})\right) \end{aligned}$$

où la v.a. $\Phi((X_p)_{p \geq 0}) = h(X_{\sigma_D((X_p)_{p \geq 0})})$. Or

$$\sigma_D((X_p)_{p \geq 0}) = \inf\{p, X_{p+1} \in D^c\} = \inf\{n \geq 1, X_n \in D^c\} - 1.$$

Comme $X_0 \notin D^c$, $\inf\{n \geq 1, X_n \in D^c\} = \inf\{n \geq 0, X_n \in D^c\}$, et

$$\sigma_D((X_p)_{p \geq 0}) = \sigma_D((X_p)_{p \geq 0}) - 1.$$

De même,

$$X_{\sigma_D}((X_{p+1})_{p \geq 0}) = X_{\sigma_D((X_{p+1})_{p \geq 0})+1} = X_{\sigma_D((X_p)_{p \geq 0})}.$$

On vérifie donc bien que

$$P(P_D h)(x) = \mathbb{E}_x\left(\Phi((X_{p+1})_{p \geq 0})\right) = \mathbb{E}_x\left(\Phi((X_p)_{p \geq 0})\right) = \mathbb{E}_x\left(h(X_{\sigma_D})\right) = P_D h(x).$$

Corollaire 6.3.18 (Problème de Dirichlet). *Soient D un domaine et f une fonction bornée définie sur $\partial_P D$. On considère le problème de Dirichlet : construire une fonction $u : D \cup \partial_P D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que*

$$(I - P)u = 0 \quad \text{dans } D, \quad u = f \quad \text{sur } \partial_P D. \quad (6.13)$$

Si pour tout $x \in D$, $\mathbb{P}_x(\sigma_D < +\infty) = 1$, ce problème admet une unique solution donnée par $u(x) = P_D f(x)$ pour $x \in D \cup \partial_P D$.

DÉMONSTRATION :

La seule chose à montrer est l'unicité. Or une solution bornée du problème de Cauchy définit une martingale $(u(X_{n \wedge \sigma_D}))_{n \geq 0}$ qui est l'espérance conditionnelle de sa v.a. terminale $u(X_{\sigma_D}) = f(X_{\sigma_D})$. Ainsi $u(X_{n \wedge \sigma_D})$ est donc égal à $P_D f X_{n \wedge \sigma_D}$.

Exemple 6.3.19 Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible et récurrente de noyau de transition P . Pour $x \in M$, notons $T_x = \inf\{n \geq 0, X_n = x\}$. Soient a et b deux points distincts de M . Alors la fonction h définie par

$$h(x) = \mathbb{P}_x(T_a < T_b)$$

est la solution du problème de Dirichlet :

$$(I - P)u = 0 \quad \text{dans } M \setminus \{a, b\}, \quad u(a) = 1, \quad u(b) = 0. \quad (6.14)$$

Exemple 6.3.20 (Équation de la chaleur et problème de Dirichlet discret).

Nous donnons un exemple de problème de Dirichlet "discrétisé d'un problème plus complexe, posé sur tout un domaine de \mathbb{R}^d et non seulement sur une grille.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine "régulier" et Δ le laplacien de \mathbb{R}^d , c'est-à-dire l'opérateur elliptique, $\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}$.

Soit $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Le problème de Dirichlet associé au couple (D, f) consiste en la recherche d'une fonction $h : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Delta h(x) = 0, \quad \forall x \in D, \quad h(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial D. \quad (6.15)$$

L'interprétation physique courante de ce problème est la suivante : supposons que D représente un conducteur thermique (une plaque de métal) et $f(x)$ une température imposée en un point x du bord de la plaque. Alors, à l'équilibre thermique la température en un point x de la plaque est donnée par $u(x)$ où u est la solution du problème (6.15). Nous considérons ici une version "discrétisée" du problème de Dirichlet. Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on note $x \sim y$ si et seulement si $|x - y| = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$. Soit $D \subset \mathbb{Z}^d$. D est dit *connexe* si pour tout couple $x, y \in D$ il existe une suite $x = x_1, \dots, x_k = y \in D$ tels que $x_{i+1} \sim x_i$. La *frontière* de D est l'ensemble

$$\partial D = \{y \in \mathbb{Z}^d \setminus D : \exists x \in D : x \sim y.\}$$

Une fonction $f : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Δ -harmonique dans D si pour tout $x \in D$

$$Lf(x) = 0$$

où Lf représente le "laplacien discret" de f

$$Lf(x) = \left[\frac{1}{2d} \sum_{y: y \sim x} f(y) \right] - f(x).$$

Le laplacien discret est l'opérateur $P - I$ de la promenade aléatoire symétrique sur \mathbb{Z}^d définie par $S_n^x = x + \sum_{i=1}^n I_i$, où les v.a. $\{I_n\}_{n \geq 1}$ forment une suite de v.a. i.i.d. de loi

$$P(I_n = e_i) = P(I_n = -e_i) = 1/2d, \quad i = 1, \dots, d$$

où e_1, \dots, e_d est la base canonique de \mathbb{R}^d . La frontière discrète définie ci-dessus coïncide avec la frontière associée à l'opérateur P . Nous pouvons donc appliquer le résultat précédent (corollaire 6.3.18) au domaine D et à la promenade aléatoire. Le point essentiel est de montrer que pour tout $x \in D$, σ_D est fini \mathbb{P}_x p.s.

Lemme 6.3.21 *Pour la promenade aléatoire symétrique*

$$\forall x \in D, \quad \mathbb{P}_x(\sigma_D < +\infty) = 1.$$

DÉMONSTRATION :

Posons $\alpha = \inf_{x \in D} \mathbb{P}_x(\sigma_D < \infty)$. Puisque D est borné connexe, $\alpha > 0$.

Par ailleurs

$$\{\sigma_D = \infty\} = \bigcap_{i=0}^n \{S_i \in D\} \cap \{\sigma_D = \infty\}.$$

D'où, en utilisant la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}_x(\{\sigma_D = \infty\}) = \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{i=0}^n \{S_i \in D\}\right) \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{S_n}(\sigma_D = \infty)) \leq \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{i=0}^n \{S_i \in D\}\right) (1 - \alpha).$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$ cela donne $(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)^2$. D'où $\alpha = 1$.

Du corollaire 6.3.18, nous déduisons donc le résultat suivant.

Proposition 6.3.22 *Soit $D \subset \mathbb{Z}^d$ un ensemble fini, connexe et $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe une unique fonction $u : D \cap \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur D et telle que $u|_{\partial D} = f$, et cette fonction admet la représentation*

$$u(x) = \mathbb{E}_x(f(S_{\sigma_D})).$$

6.4 Arrêt optimal

Cette section est une introduction au plus classique des problèmes d'optimisation stochastique, à savoir celui de choisir le meilleur instant pour prendre une décision. Nous commençons par un exemple.

6.4.1 Mathématiques, mariage ou comment choisir ?

Comme le remarque David K. Smith ³ dans son article plein d'humour, nous avons souvent, dans notre vie quotidienne, à faire des choix stratégiques parfois lourds de conséquences...

L'un des plus sérieux est celui du choix d'un partenaire, connu dans la littérature probabiliste comme le "*problème de la princesse*". Comme le notent les membres de la British Psychological Society en 1997, cité par D.K. Smith, le comportement humain typique est d'avoir un certain nombre d'ami(e)s jusqu'à ce que l'on décide que le (la) nouveau (nouvelle) est le (la) "bon(ne)". Le plus souvent les contraintes de société ne permettent pas de revenir à un(e) ami(e) délaissé(e)⁴

³Dr David K. Smith, Mathematical Statistics and Operational Research Department, University of Exeter. <http://plus.maths.org/issue3/puzzle/stopping/solution.html>

⁴Comme le fait remarquer D.K. Smith, le problème est exactement le même si on cherche l'appartement idéal, mais évidemment il est plus facile de changer d'appartement que de partenaire. Cela nous ne l'avons pas pris en compte !

La règle des 37% Le parallèle avec le directeur des ressources humaines qui doit sélectionner un candidat est clair. Il reçoit les candidats, les uns après les autres et leur dit immédiatement s'ils sont acceptés ou non. Il ne pourra pas revenir sur sa décision.

Une fois qu'il a reçu 37% des candidats, il se construit un profil de l'employé idéal qu'il pourra recruter, et la prochaine personne qui satisfait les critères obtient le job. Martin Gardner a proposé un jeu (Googol) basé sur ce problème. Des cartes distinctes sont posées, face contre table. Sur chaque carte un chiffre est noté, que le joueur ne connaît pas. On retourne une carte et on décide si on encaisse le montant de la carte, ou si on continue.

La question est évidemment d'où vient le pourcentage de 37%, ou plus généralement quelle stratégie doit-on adopter pour maximiser sa chance d'avoir fait le meilleur choix ? Il s'agit d'un problème d'arrêt optimal. Pour le résoudre, nous introduisons un modèle qui simplifie certes la réalité, mais qui essaye de prendre en compte les faits les plus importants à respecter. Nous utilisons le support du jeu Googol pour décrire la stratégie.

Solution du problème du meilleur choix

Nous supposons donc que les N cartes portent des montants distincts. Celle qui porte le plus grand montant est désignée par $b1$, le plus mauvais bN . Comme les cartes sont placées dans un ordre quelconque (par rapport à leur montant), modélisable par une permutation de $\{1, \dots, N\}$, le joueur établit l'ordre relatif des cartes retournées : la première reçoit le rang $U_1 = 1$, la deuxième a le rang $U_2 = 2$, si le montant est moins bon que le précédent, 1 sinon, et ainsi de suite. On a bien sûr toujours que U_N est égal au rang initial de la N -ième carte.

Le joueur doit décider au vu de ces observations s'il garde la carte et empêche son montant ou non. Son objectif est de maximiser la probabilité d'encaisser le plus grand montant possible.

L'idée intuitive est la suivante. Il faut retourner un certain nombre de cartes pour se faire une idée des montants en jeu et ensuite accepter la carte la meilleure (par rapport à celles des cartes observées) qui est retournée.

La question est alors évidemment de calculer combien d'observations M doit-on faire avant de prendre une décision. Nous désignons par $P(M, N)$ la probabilité d'avoir choisi le meilleur montant après avoir observé $(M - 1)$ cartes, et par $P_k(M, N)$ la

probabilité que ce choix se soit fait après avoir retourné la k -ième carte ($M \leq k$).

Par la symétrie du problème, les v.a. U_1, U_2, \dots, U_N sont indépendantes et U_j a une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, j\}$, c'est-à-dire que $P(U_j = k) = 1/j$.

On gagne à l'instant k après avoir retourné $M - 1$ cartes, si les cartes retournées aux instants $j \in \{M, \dots, N\} \setminus \{k\}$ sont de rang strictement plus grand que 1, ce qui se produit pour chacune avec une probabilité de $1 - 1/j$, et si la carte retournée à l'instant k est de rang maximal.

$$\begin{aligned} P_k(M, N) &= P(U_M > 1, U_{M+1} > 1, \dots, U_{k-1} > 1, U_k = 1, U_{k+1} > 1, \dots, U_N > 1) \\ &= \frac{M-1}{M} \times \frac{M}{M+1} \times \dots \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} \times \dots \times \frac{N-1}{N-1} \\ &= \frac{M-1}{k-1} \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{N} = \frac{M-1}{N} \frac{1}{k-1}. \end{aligned}$$

La probabilité de gagner en utilisant une telle stratégie est

$$P(M, N) = \frac{M-1}{N} \sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1}.$$

Un simple calcul montre que $P(M, N) > P(M+1, N)$ si et seulement si $\sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k-1} < 1$. Le nombre d'observations optimal est donc l'indice M pour lequel

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{1}{k-1} < 1 \leq \sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1} = G_M.$$

La détermination de M se fait à partir du calcul des sommes partielles G_M fait de manière rétrograde à partir de $M = N$. Supposons N très grand. Alors le M optimal vérifie, $\ln(M/N) \sim 1$. Par suite $M \sim \frac{N}{e}$, d'où le fameux 37% qui représente e^{-1} .

6.4.2 Arrêt optimal en horizon fini

Qu'y a-t-il de généralisable dans cet exemple? La présentation que nous en avons donnée ne permet pas de le détecter simplement. Le problème du meilleur choix se présente comme un cas particulier de ce qu'il est usuel d'appeler un problème d'arrêt optimal : la question est de choisir le moment de faire une action donnée, basée sur l'observation d'une suite de v.a., afin de maximiser un gain moyen. Évidemment, la décision d'arrêt ne peut être prise qu'en prenant en compte la série des observations faites avant de s'arrêter. Souvent le phénomène observé est décrit par une suite de v.a. (X_n) qui engendre une filtration (\mathcal{F}_n) . Le gain attendu en s'arrêtant au temps

n est une v.a. qui ne dépend que de (X_1, \dots, X_n) , en d'autres termes la suite des gains (Y_n) est un processus adapté. Les règles d'arrêt ne pouvant prendre en compte le futur sont nécessairement des temps d'arrêt.

Le problème abstrait dans le cas d'un horizon fini, n'est pas plus difficile à résoudre que le problème via les chaînes de Markov. Nous en présentons donc la solution.

Enveloppe de Snell

Soit (Y_n) une suite de v.a. adaptée à une filtration (\mathcal{F}_n) , représentant par exemple le gain d'un joueur au cours d'une série de N parties. Le joueur cherche le meilleur moment de s'arrêter, c'est-à-dire le moment qui lui garantit un gain moyen maximal.

Définition 6.4.1 *Le problème d'arrêt optimal est celui de déterminer le temps d'arrêt $T^* \leq N$ qui maximise parmi tous les t.a. $T \in \mathcal{T}_N$ inférieurs à N le gain moyen $E(Y_T)$. Le gain maximal est $J_0 = \sup_{T \in \mathcal{T}_N} E(Y_T)$. Un t.a. qui réalise le sup, s'il existe, est un t.a. optimal.*

L'idée est de procéder par récurrence rétrograde, en observant qu'à une date donnée on va exercer si le gain maximal espéré pour le futur est moindre que ce qu'on peut obtenir tout de suite.

Théorème 6.4.2 *Supposons que la suite adaptée $(Y_n)_{n \leq N}$ soit intégrable, c'est-à-dire que $\forall n \leq N, E(|Y_n|) < \infty$.*

Introduisons la suite finie de v.a. adaptées définie par récurrence rétrograde par

$$Z_n = \sup(E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n), Y_n), \quad Z_N = Y_N \quad (6.16)$$

et le t.a. $T^ = \inf\{k \leq N; Z_k = Y_k\}$. Alors*

(i) *la suite $(Z_{n \wedge T^*})$ est une martingale, et*

$$E(Z_0) = E(Z_{T^*}) = E(Y_{T^*}) = \sup_{T \in \mathcal{T}_N} E(Y_T) \quad (6.17)$$

où \mathcal{T}_N est l'ensemble des t.a. inférieurs ou égaux à N ;

(ii) *Le t.a. T^* est optimal. La v.a. Z_n est l'enveloppe de Snell de Y_n , définie comme la plus petite sur-martingale qui majore Y_n .*

DÉMONSTRATION :

⇒ Par construction, la suite (Z_n) est une sur-martingale qui majore Y_n et qui est majorée par la martingale uniformément intégrable $M_n^* = E\left(E\left(\sum_{j=1}^N |Y_k| \middle| \mathcal{F}_n\right)\right)$.

Comme avant le temps T^* , toujours par construction, $Z_n = E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$, le processus croissant prévisible associé à la sur-martingale Z_n dans la décomposition de Doob, $-A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) - Z_k)$ est donc nul jusqu'à l'instant T^* . La sur-martingale Z_n arrêtée à l'instant T^* est donc une martingale uniformément intégrable.

⇒ D'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$Z_{n \wedge T^*} = E(Z_{T^*} | \mathcal{F}_{n \wedge T^*}) = E(Y_{T^*} | \mathcal{F}_{n \wedge T^*}).$$

Prenons les espérances. Nous obtenons

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} E(Y_T) \leq \sup_{T \in \mathcal{T}} E(Z_T) \leq E(Z_0) = E(Z_{T^*}) = E(Y_{T^*}) \leq \sup_{T \in \mathcal{T}} E(Y_T).$$

L'inégalité de droite est triviale. Celle de gauche repose sur le fait que (Z_n) est une sur-martingale qui majore Y_n , et qui vérifie l'inégalité des sur-martingales sur les t.a. bornés.

⇒ Soit V_n une autre sur-martingale intégrable qui majore Y_n sur $[0, N]$. Comme à chaque date, $V_n \geq \sup(E(V_{n+1} | \mathcal{F}_n), Y_n)$, il est clair que l'inégalité qui est vraie à la fin se rétropropage à toutes les dates intermédiaires.

Remarque 6.4.3 (Il n'est jamais trop tard pour s'arrêter).

Et si on avait trop attendu ? c'est-à-dire si on avait passé T^* , y a-t-il encore quelque chose à faire ? la réponse est oui, bien sûr ! En effet, la même propriété vaut à partir de l'instant n , en espérance conditionnelle, soit si $T_n^* = \inf\{n \leq k \leq N; Z_k = Y_k\}$ et si T_n est un t.a. quelconque plus grand que n (et $\leq N$)

$$Z_n = E(Z_{T_n^*} | \mathcal{F}_n) = E(Y_{T_n^*} | \mathcal{F}_n) \geq E(Y_{T_n} | \mathcal{F}_n) \quad \text{p.s.} \quad (6.18)$$

Comme pour l'instant 0, on aimerait dire que $Z_n = \sup''_{T_n} E(Y_{T_n} | \mathcal{F}_n)$ mais cette quantité n'est pas bien définie car un "sup" non dénombrable de v.a. n'est pas nécessairement mesurable. On remplace la notion de "sup" par celle d'esssup, qui est le plus grand des sup dénombrables. C'est aussi le plus petit des majorants p.s. de la famille de v.a. Cette dernière caractérisation vaut comme définition. On peut alors généraliser à l'instant n l'ensemble des égalités vraies en 0.

$$Z_n = E(Z_{T_n^*} | \mathcal{F}_n) = E(Y_{T_n^*} | \mathcal{F}_n) = \text{esssup}_{T_n} E(Y_{T_n} | \mathcal{F}_n) \quad \text{p.s.} \quad (6.19)$$

L'égalité $Z_n = \text{esssup}_{T_n} E(Y_{T_n} | \mathcal{F}_n)$ donne un autre procédé de construction de l'enveloppe de Snell.

Corollaire 6.4.4 (Le cas markovien). *Supposons que l'objectif Y_n soit de la forme $Y_n = g_n(X_n)$ où X est une chaîne de Markov de noyau de transition P . Alors l'enveloppe de Snell Z_n est de la forme $v_n(X_n)$. La fonction v_n est définie récursivement par*

$$v_n = \sup(Pv_{n+1}, g_n), \quad v_N = g_N \quad (6.20)$$

Le t.a. optimal est le premier instant où (k, X_k) appartient à l'ensemble $\{(k, x); g_k(x) = v_k(x)\}$, plus précisément

$$T^* = \inf\{k; v_k(X_k) = g_k(X_k)\}.$$

Remarque 6.4.5 Le procédé de construction de l'enveloppe de Snell donne une solution qui ne dépend pas de la condition initiale de la chaîne. Par ailleurs, le théorème donne une méthode récursive pour construire à la fois le gain maximal espéré et le temps optimal.

Exemple 6.4.6 (Le problème du meilleur choix, (ii)). Nous reprenons l'exemple du meilleur choix présenté en début de section. Les cartes sont numérotées de 1 à N en fonction de l'ordre décroissant $b_1 > b_2 > \dots > b_N$ des montants qu'elles représentent. Les cartes sont placées dans un ordre quelconque, modélisable par une permutation σ de $\{1, 2, \dots, N\}$.

– Comme nous l'avons vu, l'objectif du joueur est de maximiser la probabilité de choisir le meilleur montant, c'est-à-dire qu'à l'instant T où on s'arrête, $P(\sigma(T) = 1)$ soit maximum. Comme on retourne les cartes l'une après l'autre, à l'instant n nous n'avons observé que les rangs relatifs des cartes U_1, U_2, \dots, U_n et donc la règle d'arrêt est un t.a. pour la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

– Notons que l'événement $\{\sigma(n) = 1\}$ lui n'est pas \mathcal{F}_n -mesurable car

$$\{\sigma(n) = 1\} = \{U_n = 1, U_{n+1} > 1, \dots, U_N > 1\}.$$

Puisque nous cherchons à nous arrêter à un instant qui est un temps d'arrêt nous pouvons remplacer le critère non adapté $\mathbf{1}_{\{\sigma(n)=1\}}$ par le critère $Y_n = P(\sigma(n) = 1 | \mathcal{F}_n)$. Ce critère vaut

$$\begin{aligned} Y_n &= P(\sigma(n) = 1 | \mathcal{F}_n) \\ &= P(U_n = 1, U_{n+1} \neq 1, \dots, U_N \neq 1 | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{1}_{\{U_n=1\}} \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} \times \dots \times \frac{N-1}{N} \\ &= \frac{n}{N} \mathbf{1}_{\{U_n=1\}}. \end{aligned}$$

Le problème du meilleur choix est donc un problème d'arrêt optimal, dont le critère est la fonction $g_n(x) = n/N \mathbf{1}_{\{x=1\}}$, associé à la chaîne de Markov (U_n) , dont la matrice de transition P est la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

– La suite des fonctions $v_n : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$ définissant l'enveloppe de Snell est définie par récurrence par

$$\begin{aligned} v_N &= g_N, \\ v_n &= \sup\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} v_{n+1}, g_n\right) \text{ pour } n < N. \end{aligned}$$

Le calcul par récurrence donne

$$\begin{aligned} v_M(j) &= \frac{M-1}{M} \sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1} \text{ pour } j \in \{2, \dots, M\}, \text{ et} \\ v_M(1) &= \sup\left(\frac{M-1}{M} \sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1}, \frac{M-1}{M}\right) = \frac{M-1}{M} = g_M(1) \end{aligned}$$

tant que

$$\sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1} < 1.$$

Le t.a. optimal est donc donné par

$$T = \inf\{k \geq M^* ; U_k = 1\}$$

où M^* est le premier entier M tel que

$$\sum_{k=M}^N \frac{1}{k-1} \geq 1.$$

On retrouve ainsi le résultat déjà calculé.

6.4.3 Arrêt optimal en horizon infini

Nous supposons maintenant que l'horizon du problème est un t.a. ζ non nécessairement borné, et même éventuellement infini. Les notations sont les mêmes que celles de la section précédente, mais nous faisons maintenant une hypothèse d'intégrabilité plus forte sur le processus de gain $(Y_n)_{n \leq \zeta}$, à savoir

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n \leq \zeta} |Y_n|\right) < +\infty$$

Théorème 6.4.7 Soit $(Y_n)_{n \leq \zeta}$ un processus de gain satisfaisant l'hypothèse précédente. Soit $Z_n^N = \text{esssup}_{n \leq T \leq N \wedge \zeta} E(Y_T | \mathcal{F}_n)$ le gain maximal d'un jeu arrêté à la date N . Alors

- (i) la suite $(Z_n^N)_N$ est une suite croissante de sur-martingales dominées par une martingale uniformément intégrable, et sa limite Z^∞ est une sur-martingale qui domine Y sur $[0, \zeta]$;
- (ii) Z^∞ est l'enveloppe de Snell de Y , c'est-à-dire la plus petite sur-martingale qui majore Y et

$$Z_n^\infty = \text{esssup}_{n \leq T \leq \zeta} E(Y_T | \mathcal{F}_n).$$

Soit T_N^* le t.a. optimal du problème d'horizon fini (6.16). Alors la suite (T_N^*) est croissante, de limite $T_\infty^* = \inf\{n \leq \zeta, Y_n \geq E(Z_{n+1}^\infty | \mathcal{F}_n)\}$, et si de plus

$$P(\exists n \leq \zeta | Y_n \geq E(Z_{n+1}^\infty | \mathcal{F}_n)) = 1,$$

le t.a. T_∞^* est optimal.

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow Par définition des sur-martingales Z^N , pour tout $n \leq N$ la suite $(Z_n^N)_N$ est croissante, majorée par la martingale u.i. $E\left(\sup_{n \leq \zeta} |Y_n| | \mathcal{F}_n\right) < +\infty$. Elle converge donc p.s. et en espérance conditionnelle vers sa limite Z^∞ , qui est donc aussi une sur-martingale.

\Rightarrow Par construction cette sur-martingale domine Y ; elle domine donc aussi l'enveloppe de Snell de Y . Pour montrer l'inégalité inverse, observons que l'existence de temps d'arrêt optimaux entraîne que les gains conditionnels $E(Y_{T_N^*} | \mathcal{F}_n) = Z_n^N$ convergent p.s. vers Z_n^∞ qui est donc inférieure à l'enveloppe de Snell. En particulier, nous avons que

$$Z_n^\infty = \text{esssup}_{\{n \leq T \leq \zeta; T \text{ born}\}} E(Y_T | \mathcal{F}_n) = \text{esssup}_{\{n \leq T \leq \zeta\}} E(Y_T | \mathcal{F}_n)$$

\Rightarrow Il est clair par construction que les t.a. T_N^* forment une suite croissante qui converge vers T_∞^* et que T_∞^* est le début, s'il existe de l'ensemble $\{n \leq \zeta | Y_n \geq E(Z_{n+1}^\infty | \mathcal{F}_n)\}$. La caractérisation du t.a. optimal donnée au théorème 6.4.2 restant valable, le temps T_∞^* est optimal dès que l'hypothèse de l'énoncé est satisfaite.

Exemple 6.4.8 Vendre sa maison

Un particulier cherche à vendre sa maison. Il reçoit des offres aléatoires indépendantes, mais le fait d'attendre lui coûte c par période de temps de référence. L'objectif est évidemment de trouver le meilleur instant pour faire la vente. Nous pouvons introduire la modélisation suivante :

Soit (U_n) une suite i.i.d. de v.a.r., positives ou nulles, de carrés intégrables, représentant le montant des offres faites et $A_n = \sup_{k \leq n} U_k$ la suite croissante des maxima partiels; c désigne un réel > 0 . Posons $Y_n = A_n - cn$, et Z_n l'enveloppe de Snell de Y_n .

Lemme 6.4.9 *La condition $E(U_1^2) < \infty$ implique que la v.a. $\sup_n Y_n^+$ est intégrable. De plus, la suite Y_n converge p.s. vers $-\infty$ avec n .*

DÉMONSTRATION :

Elle repose sur l'observation que $\sup_{n>0} Y_n = \sup_{n>0} (A_n - cn) = \sup_{n>0} (U_n - cn)$ car $U_n - cn \leq A_n - cn \leq \sup_{m \leq n} (U_m - cm)$.

Ces identités, jointes au théorème de Fubini positif, nous permettent de justifier que

$$\begin{aligned} E\left(\sup_n Y_n^+\right) &= E\left(\sup_{n>0} (U_n - cn)^+\right) \leq \sum_{n>0} E\left((U_n - cn)^+\right) \\ &= \sum_{n>0} E\left((U_1 - cn)^+\right) \leq E\left(\int_0^\infty (U_1 - cu)^+ du\right) = \frac{1}{2c} E(U_1^2). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que Y_n tend vers $-\infty$ à l'infini. Soit $c > \epsilon > 0$. Puisque $Y_n = (A_n - n\epsilon) - (c - \epsilon)n \leq \sup(A_n - n\epsilon)^+ - (c - \epsilon)n$ et que $\sup(A_n - n\epsilon)^+$ est fini p.s. d'après ce qui précède (il suffit de remplacer c par ϵ), Y_n tend vers $-\infty$ au moins aussi vite que $-(c - \epsilon)n$.

On pose $f(a) = E((U_1 - a)^+)$. L'indépendance des U_i conduit alors à

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) - Y_n = f(A_n) - c.$$

Le t.a. $T_c^* = \inf\{n; f(A_n) \leq c\} = \inf\{n; U_n \leq \gamma\}$ joue manifestement un grand rôle. Ici γ est solution de l'équation $f(\gamma) = c$.

Montrons qu'il est fini p.s. La suite A_n est une suite croissante qui converge p.s. vers la borne sup de U_1 , soit $M = \|U_1\|_\infty$. Mais comme Y_1 est p.s. inférieure à M , la suite $f(A_n)$ décroît p.s. vers 0. Le t.a. T_c^* est donc fini p.s. Puisque sur $n \leq T_c^*$, (Y_n) est une sous-martingale et une sur-martingale pour $n \geq T_c^*$, le t.a. T_c^* est clairement optimal. Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, l'ensemble d'arrêt est de la forme $A_n \geq 1 - (2c)^{\frac{1}{2}}$ si $c \leq \frac{1}{2}$, ou $A_n \geq \frac{1}{2} - c$ si $c > \frac{1}{2}$.

Exemple 6.4.10 Options américaines Dans le chapitre sur les marchés financiers, nous verrons un autre exemple de problème d'arrêt optimal, connu sous le nom d'options Américaines. Nous étudierons leur prix et leur couverture.

Chapitre 7

Introduction à la finance des produits dérivés

Introduction

De nos jours, la finance est devenue une véritable industrie, dont le poids économique est considérable¹. Tous les jours, les media diffusent de l'information concernant les marchés financiers et leurs réactions à certains faits politiques ou économiques. Les mécanismes financiers ont beaucoup évolué depuis une trentaine d'années, sous l'effet conjugué de facteurs politiques et techniques. La politique de dérégulation introduite dans les années 70 aux États-Unis a transformé considérablement la sphère financière internationale, en mettant un terme aux réglementations anticoncurrentielles imposées par les états. Parallèlement, le développement très rapide des moyens de calcul et de transmission de l'information a conduit à une informatisation systématique des opérations.

Dans un contexte d'autorégulation du marché, les différents acteurs de l'économie sont exposés à l'imprévisibilité des prix des produits échangés dans le futur, et aux fluctuations des paramètres fondamentaux de l'économie comme les taux de change,

¹Nous remercions Madame Chachoua, journaliste, pour les nombreux échanges que nous avons pu avoir sur ce thème.

les taux d'intérêt, les valeurs boursières...

Les institutions financières ont mis en place des dispositifs destinés à gérer cette incertitude, et à limiter son impact sur l'activité économique. Les produits dit "*dérivés*" en font partie. Pour les différents acteurs de l'économie, industriels, investisseurs ou spéculateurs, leur objectif essentiel est d'offrir une protection contre les fluctuations des cours dans le futur. Les contrats les plus simples sont l'analogie dans les marchés financiers de la promesse de vente de l'acheteur d'une maison. Le prix est fixé aujourd'hui mais la transaction sera réalisée dans le futur à une date et à un prix déterminés dans le contrat. On dit qu'on a réalisé une *opération à terme*.

C'est au début des années 1970 que sont créés les premiers MARCHÉS ORGANISÉS de produits dérivés. Le *Chicago Board Of Trade* (CBOT) ouvre à Chicago en 1973. Les États-Unis sont ensuite suivis par l'Europe : par exemple en France le MATIF (marché à terme international de France) est créé en 1985-86 et le Marché des Options Négociables de Paris (MONEP) deux ans plus tard. Après la création de l'Euro, ces marchés ont été regroupés avec d'autres marchés européens au sein de la structure EuroNext. Sur ce type de marché, on négocie un grand nombre de produits dérivés standards, qui portent aussi bien sur des actions, des taux de change, des obligations, des taux d'intérêt ou des matières premières. D'autre part, dans ces marchés sont négociés non seulement des contrats à terme, mais également des options qui garantissent à l'acheteur, moyennant le paiement d'une prime, de pouvoir acheter ou vendre un actif au prix plancher (appelé *prix d'exercice*) fixé le jour de la signature. À la différence des contrats à terme, il a donc le choix (d'où le caractère optionnel) de réaliser l'opération au cours le plus favorable pour lui, le cours de marché ou le cours garanti. L'industrie du risque financier (*risque de marché*) concerne des montants énormes puisque près de 50 mille milliards de dollars sont assurés chaque année. Les mathématiques, et plus précisément les probabilités, interviennent de manière importante dans le calcul des prix et des portefeuilles de couverture.

7.1 Évaluation et couverture dans un modèle à une période

Pour expliquer les principes qui sous-tendent l'évaluation et la couverture des produits dérivés, nous présentons un modèle de marché financier simple, qui ne comporte que deux titres :

7.1. ÉVALUATION ET COUVERTURE DANS UN MODÈLE À UNE PÉRIODE 221

- une *action*, dont le prix est connu aujourd'hui, mais pas dans l'avenir. On parle de titre risqué, ou encore de sous-jacent du contrat ;
- la *cash* ou *argent*, c'est-à-dire l'argent placé à la banque, dont le rendement est supposé connu de manière certaine entre deux dates successives.

La loi de fonctionnement des marchés liquides est l'**absence d'arbitrage**.

Dans un marché liquide, il n'y a pas d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.

Avant d'aborder les questions de modélisation proprement dites, regardons sur un exemple simple la notion d'arbitrage :

Exemple 7.1.1 Supposons que l'on puisse emprunter sur une période au taux de R . Si un titre a un rendement R_e plus grand que R , on emprunte 1 € qu'on investit dans le titre. À l'échéance, on vend le titre $(1 + R_e)$ €, pour rembourser l'emprunt $(1 + R)$ €. On a gagné dans l'opération : $[(1 + R_e) - (1 + R)]$ €, et réalisé un arbitrage. Résumons les opérations dans le tableau suivant :

date	0	1
argent	-1	$-(1 + R)$
actif	1	$1 + R_e$

Remarque 7.1.2 Dans le langage courant, les intérêts sont toujours énoncés en taux annuels, pour que les investisseurs puissent les comparer facilement. Quand on calcule le taux d'intérêt pour une période de temps dt , il suffit de multiplier le taux annuel r par dt . Ainsi dans l'exemple précédent, si la période de temps est le mois, on aura, si les taux sont constants, $R = r \times \frac{1}{12}$. Notons qu'en ce moment les taux d'intérêt sont entre 1,5% et 3,5%.

7.1.1 Un modèle simplifié à une période

Nous supposons pour commencer que les titres, l'action et l'argent sont négociés entre deux dates seulement : on achète aujourd'hui, et on vend demain.

Portefeuille d'actif

1. Un Euro (€) placé à la date 0 à la banque rapporte à la date 1 (après une période), de manière certaine $(1 + R)€$.
2. L'action, *l'actif risqué*, qui vaut $S€$ aujourd'hui, vaudra demain $hS€$ ou $bS€$ à la date 1, suivant que le marché est à la hausse ou à la baisse. On dit suivant *l'état du monde*. En d'autres termes, le rendement de l'actif, défini comme la différence de valeur entre le cours de la date 1 et celui de la date 0, normalisé par la valeur en 0, est soit $h - 1$, soit $b - 1$.

Dans ce modèle, on considère qu'il y a un consensus de marché sur les niveaux h ou b de variation de l'actif entre deux dates.

Par ailleurs, une des deux occurrences peut être plus probable que l'autre. Nous désignons par $p \in]0, 1[$ la probabilité de hausse. Cette probabilité peut avoir été estimée sur les données passées, ou correspondre aux "anticipations" du trader².

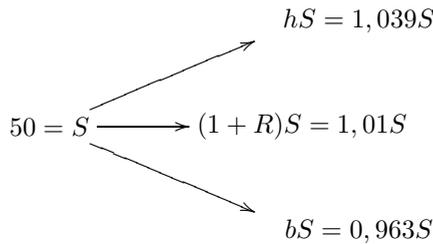


FIG. 7.1 – Mouvement de l'actif risqué.

3. Une *stratégie de portefeuille* est un couple (α, δ) où α représente le montant en cash de la stratégie et δ le nombre de parts d'actif risqué possédées à la date 0. Il n'y a aucune restriction de signe sur α et δ car les emprunts et les ventes à découvert sont autorisés. La valeur du portefeuille est :

$$\begin{aligned}
 & - \text{ à la date } 0 \quad V_0 = \alpha \times 1 + \delta S ; \\
 & - \text{ à la date } 1 \quad \begin{cases} V_1(h) = \alpha(1 + R) + \delta S h & \text{en cas de hausse} \\ V_1(b) = \alpha(1 + R) + \delta S b & \text{en cas de baisse.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

²Les données numériques du graphique correspondent à celles de l'exemple 7.1.3.

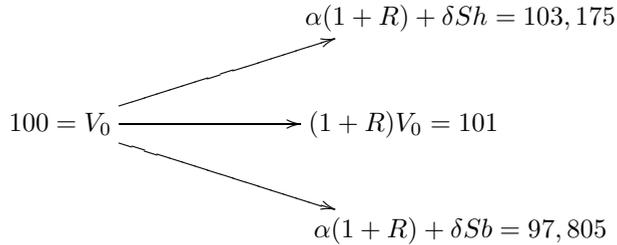


FIG. 7.2 – Mouvement du portefeuille.

Exemple 7.1.3 On considère une action dont la valeur aujourd'hui S est de 50€. Supposons qu'en une période le titre peut gagner au plus 3,9% ou perdre 3,7%. Le mouvement à la hausse est de $h = 1,039$, et à la baisse $d = 0,963$. Après une période les valeurs de l'action ne peuvent donc être que de 51,95€ ou 48,13€. Dans la même période le taux d'intérêt est de $R = 1\%$.

Si maintenant on décide d'investir une richesse initiale de 100€, pour 75% en actions et 25% en cash, on va donc acheter 1,5 actions, pour un montant de 75€, et placer les 25€ restant à la banque. Après une période, la valeur du portefeuille est de $75 \times 1,039 + 25 \times 1,01 = 103,175\text{€}$, ou de $75 \times 0,963 + 25 \times 1,01 = 97,805\text{€}$, alors que le même investissement placé uniquement à la banque aurait rapporté de manière sûre 101.

Le *problème de gestion de portefeuille* consiste à choisir la stratégie risquée qui correspond le mieux à l'objectif du client en termes de risque, souvent mesuré en comparant l'espérance de gain avec la variance de ces gains.

7.1.2 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Dans un marché liquide, avec beaucoup d'intervenants, les prix sont cohérents, au sens où il n'y a pas d'arbitrage. Cette hypothèse impose un mécanisme de fonctionnement dans les marchés liquides, notamment les marchés organisés. Elle est à la base des méthodes d'évaluation. Nous donnons maintenant une définition précise de cette notion dans un marché liquide et sans coût de transaction.

Définition 7.1.4 Une opportunité d'arbitrage entre les dates 0 et 1 est une stratégie

de portefeuille (α, δ) dont la valeur V vérifie :

- i) $V_0 = 0$;
- ii) $V_1(h)$ et $V_1(b) \geq 0$ et $V_1(h)$ ou $V_1(b) > 0$.

Par conséquent, en absence d'opportunité d'arbitrage, deux portefeuilles qui ont la même valeur à la date 1 dans les états haut et bas, ont la même valeur à la date 0 .

DÉMONSTRATION :

Montrons comment l'unicité des prix est une conséquence de l'AOA.

Supposons que les deux portefeuilles qui génèrent les mêmes flux Φ positifs à la date 1 n'aient pas la même valeur à la date 0 et désignons par 1 le portefeuille dont la valeur V_0^1 est la plus élevée. Considérons la stratégie :

- en 0, achat de $\theta\%$ ($\theta > 1$) du portefeuille 2 et vente du portefeuille 1 de telle sorte que $V_0 = \theta V_0^2 - V_0^1 = 0$. L'investissement initial est nul ;
- à la date 1, on revend les parts du portefeuille 2 et on rachète 1. Le résultat conduit à un gain dans tous les états du monde de $(\theta - 1)\Phi$, strictement positif lorsque Φ est strictement positif. C'est un arbitrage.

Cette hypothèse a de très nombreuses conséquences.

Proposition 7.1.5 *En absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)*

$$b \leq 1 + R \leq h \tag{7.1}$$

Les inégalités sont soit strictes toutes les deux, soit des égalités toutes les deux, ce qui signifie que l'actif a même rendement que le cash.

DÉMONSTRATION :

Nous faisons un raisonnement d'arbitrage, proche du précédent.

Supposons $1 + R < b$, et considérons la stratégie :

- en 0 avec une mise de fonds nulle, emprunt de S et achat d'une action ;
 - en 1, revente de l'action qui vaut au moins bS €, et remboursement de l'emprunt.
- Le bilan à la date 1 est de au moins $(b - (1 + R))S > 0$. Cette stratégie est donc une opportunité d'arbitrage.

L'autre inégalité s'obtient par un raisonnement analogue.

De plus, si l'une des inégalités est une égalité, par exemple $1 + R = h > b$, la même stratégie conduit à un flux strictement négatif, ce qui est encore une opportunité d'arbitrage.

Nous en déduisons immédiatement la solution du problème d'évaluation (*pricing*) et de couverture (*hedging*) d'un produit dérivé.

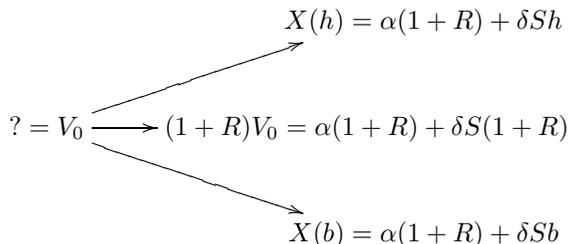


FIG. 7.3 – Produit dérivé.

Théorème 7.1.6 *Supposons $b < 1 + R < h$.*

Un flux de $X(h)$ dans l'état haut et de $X(b)$ dans l'état bas est duplicable par un portefeuille (α, δ) , de valeur initiale $V_0 = \alpha + \delta S$ qui vérifie :

$$\delta = \frac{X(h) - X(b)}{(h - b)S}; \quad (7.2)$$

$$(1 + R)\alpha = X(h) - \delta S h;$$

$$(1 + R)V_0 = X(b) \frac{h - (1 + R)}{h - b} + X(h) \frac{(1 + R) - b}{h - b}. \quad (7.3)$$

Le prix à la date 0 d'un contrat qui délivre un tel flux est de V_0 .

*Le portefeuille (α, δ) s'appelle le **portefeuille de couverture**; en français, on dit *portefeuille de hedge*.*

DÉMONSTRATION :

La valeur à la date 1 d'un portefeuille (α, δ) qui duplique $(X(h), X(b))$ est de la forme $X(h) = V_1(h) = \alpha(1 + R) + \delta S h$ et $X(b) = V_1(b) = \alpha(1 + R) + \delta S b$.

Le couple (α, δ) est donc solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues avec second membre. Il admet une solution et une seule car $h > b$ par absence d'arbitrage.

Il n'est pas nécessaire de résoudre le système complètement pour connaître la valeur en 0 de ce portefeuille, puisque $(1 + R)V_0 = \alpha(1 + R) + \delta S(1 + R) = V_1(b) + \delta S(1 + R - b)$. En utilisant la valeur de $V_1(b)$ et de δ , on peut transformer cette égalité en celle de l'énoncé.

Par AOA, tout actif duplicable a comme valeur financière en 0 celle de son portefeuille de couverture.

Interprétation géométrique

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'AOA Mathématiquement, l'AOA revient à établir que pour tout système linéaire de trois équations à deux inconnues de la forme,

$$\begin{cases} (1+R)V_0 = \alpha(1+R) + \delta S(1+R) \\ V_1(h) = \alpha(1+R) + \delta S h \\ V_1(b) = \alpha(1+R) + \delta S b, \end{cases} \quad (7.4)$$

la condition “ $V_1(h)$ et $V_1(b) \geq 0$ et $V_1(h)$ ou $V_1(b) > 0$ ” entraîne que V_0 n'est pas nul.

Il est possible d'interpréter GRAPHIQUEMENT cette propriété.

Considérons deux points distincts $M_h = (Sh, V_1(h))$ et $M_b = (Sb, V_1(b))$ du quart de plan positif, qui ne sont pas tous les deux sur l'axe des x .

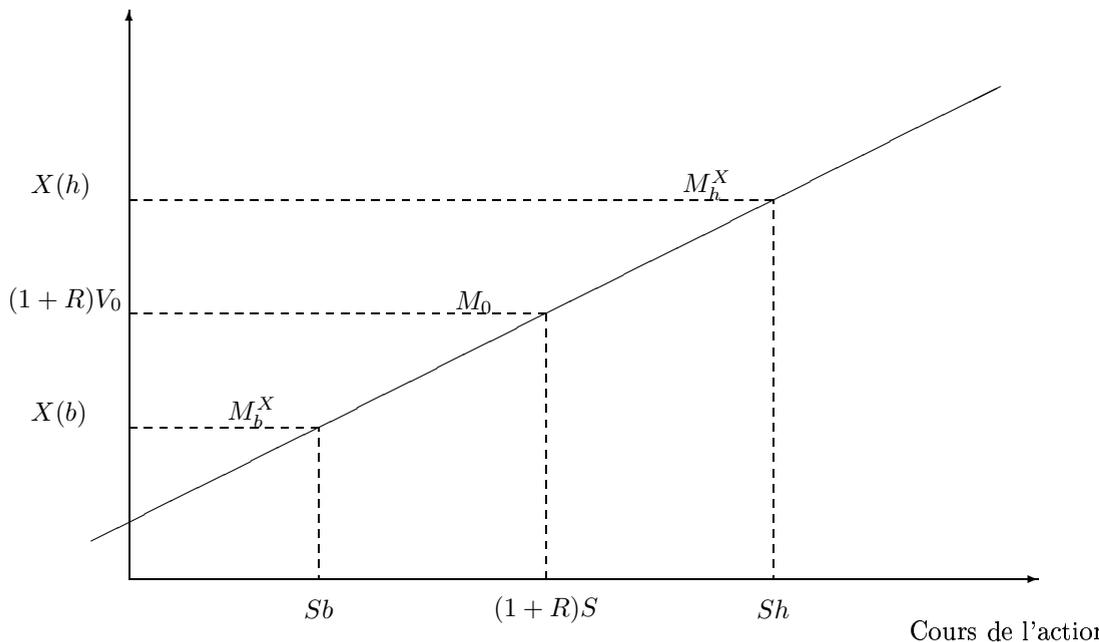
La droite $M_h M_b$ d'équation $y = \alpha(1+R) + \delta x$ qui joint ces deux points définit les coefficients (α, δ) du portefeuille. La quantité d'actions dans le portefeuille est obtenue en calculant la pente de cette droite. Le montant en cash est donné par l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe des y , divisée par $(1+R)$.

L'AOA est équivalente au fait que le point M_0 de cette droite d'abscisse $x_0 = S(1+R)$ a une ordonnée y_0 (égale à $(1+R)V_0$), qui ne doit jamais être nulle. Il est clair que ceci n'est possible que si $Sb \leq x_0 \leq Sh$, ce qui entraîne par convexité que y_0 est toujours positif ou nul. De plus, si deux de ces abscisses sont confondues, par exemple $x_0 = Sh$, un portefeuille tel que $V_1(h) = 0$ est une opportunité d'arbitrage.

Remarquons que si on connaît la richesse initiale V_0 investie dans le portefeuille, et la quantité d'actif risqué δ , il est possible de reconstruire géométriquement les deux valeurs possibles d'un portefeuille autofinçant en traçant la droite qui passe par le point M_0 de coordonnées $((1+R)S, (1+R)V_0)$, de pente δ . Les valeurs du portefeuille sont les ordonnées des points M_h et M_b de cette droite d'abscisses respectives Sh et Sb .

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉVALUATION ET DE LA COUVERTURE Un produit dérivé est caractérisé par les flux $X(h)$ et $X(b)$ qu'il délivre à la date 1 dans les états haut et bas. Géométriquement, on lui associe les deux points du plan $M_h^X = (Sh, X(h))$ et $M_b^X = (Sb, X(b))$. L'équation de la droite qui passe par ces deux points M_h^X et M_b^X peut s'écrire $y = \alpha(1+R) + \delta x$ où δ est la pente de la droite. C'est l'équation de la droite associée à un portefeuille autofinçant dont la valeur en 0 multipliée par $(1+R)$ est l'ordonnée du point M_0 de la droite, d'abscisse $(1+R)S$.

Valeur du portefeuille

FIG. 7.4 – Portefeuille répliquant un produit dérivé $(X(h), X(b))$

Remarque 7.1.7 (Marché incomplet). À ce stade, une question importante se pose. Nous avons choisi un modèle de marché avec un actif risqué et seulement deux mouvements possibles par période. Nous en avons déduit que tout produit dérivé est répliquable par un portefeuille, de valeur initiale la prime du produit dérivé.

Ce modèle est très schématique, et bien sûr très loin a priori de la réalité. Et si le mouvement anticipé de l'action avait trois occurrences : hausse, baisse, stable(σ) ? Que devient l'AOA ? Que deviennent l'évaluation et la couverture ?

Avec des notations évidentes, les valeurs possibles d'un portefeuille sont constituées de trois points M_h , M_b , M_σ alignés. La condition de non-arbitrage se traduit encore par le fait que si les trois points sont dans le demi-quadrant positif, le point M_0 doit appartenir à la droite et aussi au demi-quadrant positif. Comme ceci doit être vrai pour toutes les droites de ce demi-quadrant, nécessairement $b < 1 < h$ et $(1+R) < h$.

La question de la couverture d'un produit dérivé n'admet plus de solution simple. Soient $X(h)$, $X(\sigma)$, $X(b)$ les valeurs possibles de ce contrat à la date 1. Un tel contrat ne peut être répliqué par un portefeuille que si les trois points M_h^X , M_σ^X , M_b^X sont alignés. Si ce n'est pas le cas, a priori on n'a pas de règle universelle pour donner

le prix de ce produit. On dit que le marché est INCOMPLET. Il y a une abondante littérature sur différentes méthodologies d'évaluation dans ce contexte.

Une solution possible apparaît lorsqu'il existe un produit dérivé très liquide, (par exemple une option dont le prix d'exercice est égal à la valeur du cours) dont le prix aujourd'hui est connu. La stratégie de couverture consiste maintenant à investir, dans le cash, le titre risqué et le produit dérivé X^* de prix aujourd'hui π_0^* . Un portefeuille est la donnée des quantités (α, δ, κ) investies dans ces trois actifs. La valeur d'un portefeuille dans l'un des trois états du monde $j = (h, 1, b)$ est donnée par $V_1(j) = \alpha(1 + R) + \delta S_j + \kappa X^*(j)$. Répliquer un dérivé donné $\{X(j); j = (h, 1, b)\}$ revient à résoudre un système de trois équations à trois inconnues, qui admet une solution et une seule si le déterminant

$$\begin{aligned} \det &= \begin{vmatrix} S(h-1), & X^*(h) - X^*(1) \\ S(1-b), & X^*(1) - X^*(b) \end{vmatrix} \\ &= S(h-1)(1-b) \left(\frac{1}{1-b} (X^*(1) - X^*(b)) - \frac{1}{h-1} (X^*(h) - X^*(1)) \right) \end{aligned}$$

est non nul, c'est-à-dire si la pente de la droite $M^*(1)M^*(b)$ est différente de celle de la droite $M^*(h)M^*(1)$. D'un point de vue financier, cela revient à dire que le produit dérivé de couverture X^* n'est pas répliquable.

Sous cette hypothèse, pour tout produit dérivé, il existe un portefeuille de couverture, correspondant en un investissement dans du cash, de l'action et le produit dérivé de référence. On dit que le produit dérivé X^* de référence a complété le marché.

Dans ce cas, le prix du produit dérivé quelconque est le prix de sa couverture, c'est-à-dire la valeur en 0 du portefeuille répliquant.

Interprétation probabiliste

Nous revenons au modèle à deux états.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas utilisé la probabilité de hausse ou de baisse de l'action. Or en général, les traders (les opérateurs qui traitent ce genre de contrats) ont des a priori (anticipations) sur les mouvements futurs de l'action. Nous pouvons les décrire en introduisant les probabilités de hausse et de baisse $\mathbb{P} = (p, 1-p)$ anticipées par le marché. Avec cette probabilité \mathbb{P} , le rendement espéré de l'action est donné par

$$\frac{1}{S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1 - 1) = hp + b(1-p) - 1 = (h-1)p + (b-1)(1-p)$$

où S_1 est la variable aléatoire définie par $S_1 = Sh$ dans l'état haut et Sb dans l'état bas.

Si on cherche à le comparer à celui du cash,

$$\frac{1}{S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1 - S) - R = (h - 1 - R)p + (b - 1 - R)(1 - p)$$

La quantité $[h - (1 + R)]p - [(1 + R) - b](1 - p)$ apparaît comme *une prime de risque* associée à la possession d'un titre "risqué", l'idée étant qu'on n'investira (vendra) dans une action que si son rendement a priori est supérieur (inférieur) à celui du cash.

Toutefois il existe toujours une probabilité associée à une prime de risque nulle sous laquelle rendement de l'action et rendement du cash sont les mêmes.

Proposition 7.1.8 *Supposons $h > b$ et notons Q la probabilité qui affecte la probabilité $q = \frac{1 + R - b}{h - b}$ à l'état du monde haut et $1 - q = \frac{h - (1 + R)}{h - b}$ à l'état du monde bas.*

Sous Q , l'espérance de gain obtenu en plaçant 1€ sur l'actif risqué est égale à

$$\frac{1}{S} \mathbb{E}_Q(S_1) = 1 + R, \quad (7.5)$$

où $S_1 = Sh$ dans l'état haut et Sb dans l'état bas. La probabilité Q est appelée probabilité risque-neutre, puisque sous cette probabilité la prime de risque est nulle.

Plus généralement, sous Q , l'espérance de gain obtenu en plaçant 1€ dans n'importe quel portefeuille est égale à $(1 + R)$.

DÉMONSTRATION :

D'après le système 7.4, la valeur aléatoire V_1 d'un portefeuille autofinçant vaut $V_1 = \alpha(1 + R) + \delta S_1$. Prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre, il vient

$$\mathbb{E}_Q(V_1) = \alpha(1 + R) + \delta \mathbb{E}_Q(S_1) = \alpha(1 + R) + \delta(1 + R)S_0 = (1 + R)V_0.$$

Lorsque $V_0 = 1$, on obtient le résultat cherché.

Nous obtenons donc une règle d'évaluation très proche de celle appliquée en assurance, où le prix est en gros la valeur moyenne des pertes. Toutefois, l'espérance du calcul n'est pas la probabilité a priori, mais une probabilité corrigée, qui tient compte de la réplification.

Corollaire 7.1.9 *Le prix d'un produit dérivé $X_1 = (X(h), X(b))$ est l'espérance risque-neutre du flux terminal X_1 actualisé au taux $1 + R$*

$$V_0^X = \frac{1}{1 + R} \mathbb{E}_Q(X_1) = \frac{1}{1 + R} \left(\frac{(1 + R) - b}{h - b} X(h) + \frac{h - (1 + R)}{h - b} X(b) \right) \quad (7.6)$$

En particulier, si $X(h) = F_1(S_h)$, $X(b) = F_1(S_b)$, le prix π_0^X est une fonction $F_0(1, S)$ donnée par $F_0(1, S) = (1 + R)^{-1} \mathbf{Q} F_1(S)$ où \mathbf{Q} est le noyau de transition $\mathbf{Q}(S, dy) = q\delta_{S_h}(dy) + (1 - q)\delta_{S_b}(dy)$

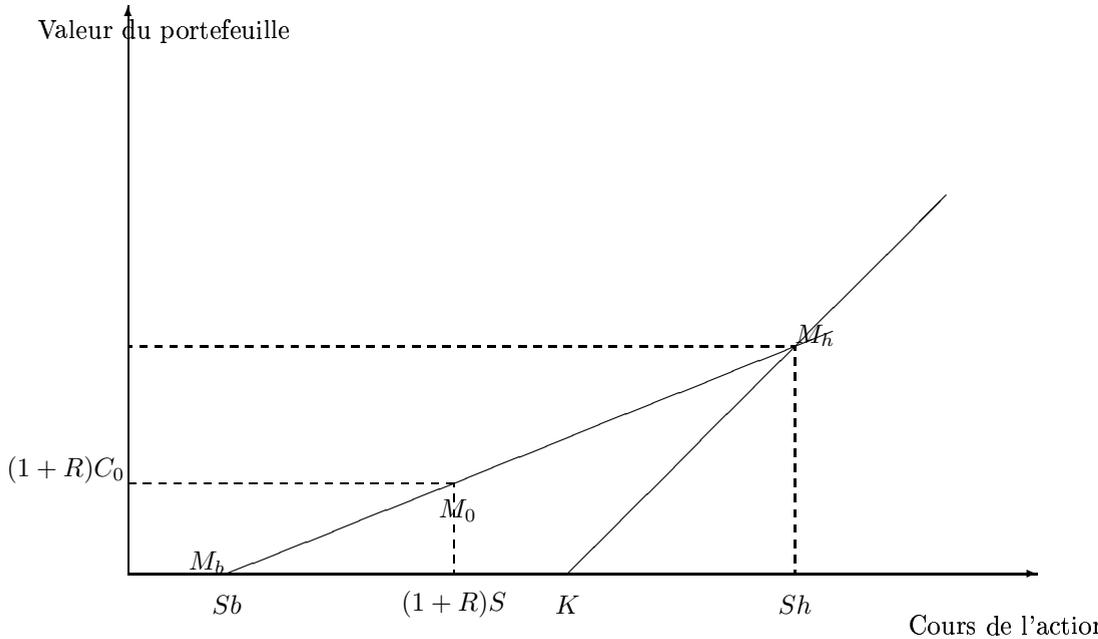


FIG. 7.5 – Prix et couverture d'une option d'achat

LES OPTIONS D'ACHAT OU DE VENTE Les achats et ventes de produits risqués dans le futur sont possibles sur les marchés financiers. On réalise alors une opération à terme.

L'acheteur se met d'accord avec le vendeur sur le prix qui sera pratiqué dans le futur à la date fixée (on parle de *prix à terme*). Il signe donc une "*promesse de vente*" avec le vendeur au cours garanti dans le contrat. Cela signifie que l'opération à terme se fera dans les conditions du contrat que cela soit favorable ou non au vendeur. Comme il n'y a pas d'échange d'argent à la signature du contrat, de nombreuses dispositions réglementaires sont prises pour que les deux contreparties respectent leurs engagements ; par exemple, les marchés organisés se portent garants des opérations réalisés par leur intermédiaire.

Un acheteur qui souhaiterait ne faire l'opération que dans des conditions favorables va

plutôt chercher à s'assurer, c'est-à-dire faire l'opération précédente, mais seulement si le cours garanti, appelé aussi *prix d'exercice* est inférieur à celui du titre risqué à l'échéance. Cette fois, il paye le prix de cette assurance au début de la transaction. Il a acheté une OPTION D'ACHAT, dont la maturité et le prix d'exercice sont fixés dans le contrat. S'il cherche à vendre à terme, il peut acheter une OPTION DE VENTE qui lui garantira un prix de vente minimum, contre une prime payée aujourd'hui.

Les investisseurs qui anticipent une hausse du titre risqué peuvent acheter des options d'achat à des fins spéculatives, car si la hausse se réalise les gains peuvent être élevés, alors que les pertes sont réduites à la prime. Il n'en est pas de même des options de vente qui peuvent générer des très larges pertes (Procter et Gamble).

Le prix garanti (d'exercice) d'une option d'achat ou de vente se trouve nécessairement dans l'intervalle $[Sb, Sh]$, puisque sinon il n'y a aucune incertitude. Pour calculer le prix de cette option, le vendeur cherche à couvrir les pertes potentielles qu'il supporte. Le prix est comme nous l'avons vu le prix de la couverture.

Corollaire 7.1.10 *Soit $Sb < K = kS < Sh$ le prix d'exercice d'une option de maturité 1. S'il s'agit d'une option d'achat, (Call), le flux à maturité vaut $X^{\text{Call}}(h) = Sh - K$, $X^{\text{Call}}(b) = 0$. Son prix est donné par*

$$C_0 = (Sh - K) \frac{(1 + R) - b}{h - b} = S(h - k)q. \quad (7.7)$$

S'il s'agit d'une option de vente, (Put), le flux à maturité vaut $X^{\text{Put}}(h) = 0$ et $X(b^{\text{Put}}) = K - Sb$. Son prix est donné par

$$P_0 = (K - Sb) \frac{h - (1 + R)}{h - b} = S(k - b)(1 - q) \quad (7.8)$$

La quantité d'actions nécessaire à la couverture est donnée par

$$\delta(\text{Call}) = \frac{h - k}{h - b}, \quad \delta(\text{Put}) = \frac{k - b}{h - b} \quad (7.9)$$

L'équivalence entre l'absence d'opportunité d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque-neutre a été étendue en toute généralité dans les modèles finis par Harrison et Kreps [48] 1) et de nombreux auteurs.

Remarque 7.1.11 (Marché incomplet, (ii)). Nous revenons à la situation où l'actif peut prendre trois valeurs différentes. Il existe une infinité de probabilités risque-neutre, caractérisées par deux paramètres, π_h et π_b compris entre 0 et 1 sachant que

$$\pi_\sigma = 1 - (\pi_h + \pi_b).$$

Les probabilités risque-neutre sont caractérisées par le fait que $E_\Pi(S_1) = (1 + R)S$, soit $h\pi_h + 1 - (\pi_h + \pi_b) + b\pi_b = 1 + R$ ou encore $(h - 1)\pi_h - (1 - b)\pi_b = R$. Il existe donc une infinité de probabilités qui vérifient cette condition de moment.

Supposons maintenant qu'un produit dérivé $(X^*(h), X^*(1), X^*(b))$ non répliquable soit évalué par le marché au prix de C_0^X . Il existe une seule probabilité risque-neutre pour laquelle

$$C_0^X(1 + R) = E_\Pi(X_1^*) = (X^*(h) - X^*(1))\pi_h + (X^*(b) - X^*(1))\pi_b + X^*(1),$$

car, comme nous l'avons vu le système

$$(h-1)\pi_h - (1-b)\pi_b = R, \quad (X^*(h) - X^*(1))\pi_h + (X^*(b) - X^*(1))\pi_b = C_0^X(1+R) - X^*(1)$$

admet une unique solution.

Si nous notons par Π^* cette probabilité, nous déduisons de la possibilité de répliquer tout produit dérivé $X_1 = (X(h), X(1), X(b))$ par un portefeuille de cash, action, et dérivé de référence X^* , le fait que la valeur en 0 de ce portefeuille est l'espérance par rapport à Π^* du flux X_1 actualisé.

Remarquons que si on avait utilisé un autre produit dérivé de référence, on aurait sélectionné une autre probabilité risque-neutre pour l'évaluation.

7.2 Un modèle d'arbre binomial à N périodes

La simplicité du modèle à une période ne permet pas de rendre compte de la complexité des mouvements des actifs sous-jacents. La première extension naturelle est de supposer que le temps "calender" et le temps des variations n'est pas le même. Par exemple, la journée peut être décomposée en un nombre donné de périodes de temps. Cela rejoint une information de marché, puisqu'il est possible d'avoir des cotations en temps réel sur les principales données financières. Il nous faut donc modéliser des mouvements successifs pendant un nombre N périodes de temps notées dt .

Cette nécessité s'impose aussi par le fait que la *maturité* des contrats, c'est-à-dire le temps entre aujourd'hui et la date de fin de contrat, est en général assez longue. Nous la supposons aussi en général égale à N périodes de temps. Ces hypothèses ont été faites par Cox Ross et Rubinstein en 1979 [?].

7.2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Une extension naturelle et simple du modèle à une période est la suivante :

1. le rendement de l'argent entre les périodes $(n - 1)$ et n est constant et noté R , c'est-à-dire que 1€ en $(n - 1)\text{dt}$ vaut $(1 + R)\text{€}$ de la date ndt ;
2. entre deux dates successives, le mouvement de l'action est du type "hausse", "baisse", avec les mêmes niveaux (h, b) que dans un modèle à deux périodes.

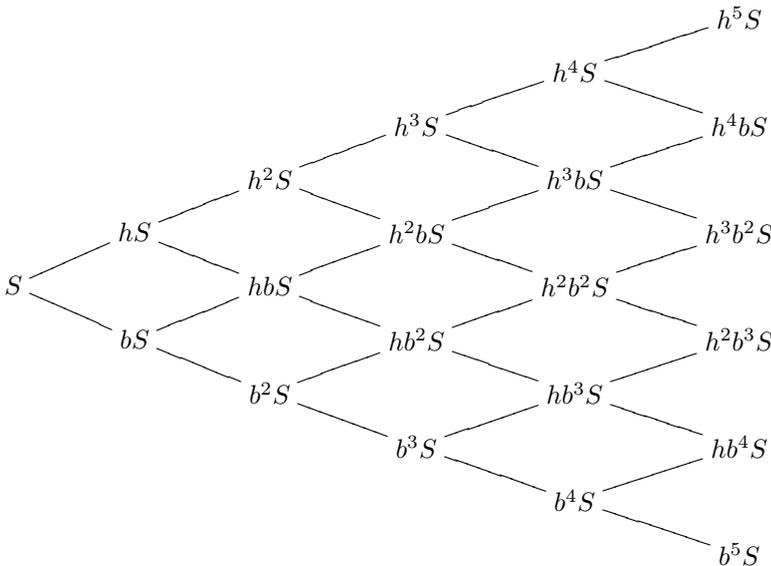


FIG. 7.6 – L'arbre binomial

À la maturité Ndt , il y a eu 2^N chemins possibles, qui donnent seulement $N + 1$ valeurs distinctes au prix de l'action. Désignons par ω un chemin quelconque, (un état du monde disent les économistes) et par $S_n(\omega)$ la valeur de l'action à la date ndt pour le chemin ω . Il est clair que $S_n(\omega)$ ne dépend pas des valeurs du chemin ω postérieures à la n^e période. Plus précisément, si nous désignons par $Z_n(\omega)$ le nombre de mouvements à la hausse du chemin ω entre $[0, ndt]$, il est facile de voir que

$$S_n(\omega) = Sh^{Z_n(\omega)}b^{n-Z_n(\omega)}. \tag{7.10}$$

Nous pouvons encore détailler cette description en introduisant la suite de variables aléatoires $(Y_n(\omega); n \in [1, N])$ où Y_n vaut 1 s'il y a eu une hausse entre les périodes

$n-1$ et n , et 0 sinon, de telle sorte que $Z_n(\omega) = \sum_{j=1}^n Y_j(\omega)$. Lorsque $b = 1/u$ comme dans la remarque 4.4.4 du chapitre 4, $S_n(\omega) = Su^{2Z_n - n}(\omega)$, où $2Z_n - n$ est la somme de n v.a. indépendantes qui prennent les valeurs 1 et -1 .

L'espace de probabilité sous-jacent Les v.a. $(Y_n(\omega); n \in [1, N])$ sont les coordonnées de l'espace $\Omega = \{0, 1\}^N$ que nous pouvons munir d'une probabilité a priori P , pour laquelle ces v.a. sont indépendantes et de même loi avec probabilité p de hausse et $(1-p)$ de baisse. Les variables aléatoires $(Y_n; n \in [1, N])$ sont des variables de Bernoulli indépendantes, et Z_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) . C'est une des raisons pour laquelle ce modèle est connu sous le nom de **modèle binomial**.

Le mouvement de l'action est déduit de celui de Z_n par la formule

$$S_n = S h^{Z_n} b^{n-Z_n} = S b^n \left(\frac{h}{b}\right)^{Z_n}. \quad (7.11)$$

Les accroissements relatifs de S sont des v.a. indépendantes, qui sont des exponentielles de v.a. de Bernoulli.

La suite (S_n) est un chaîne de Markov de noyau de transition $P(S, Sh) = p$, $P(S, Sb) = 1-p$. Introduisons la filtration naturelle de cette chaîne de Markov, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, S_n) = \sigma(S_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

Lorsque $p = q = \frac{1+R-b}{h-b}$, la probabilité est notée Q , et est encore appelée *risque-neutre*. La propriété de base du modèle à deux périodes se généralise sans difficulté au modèle à N périodes, compte-tenu de la propriété d'indépendance des accroissements relatifs.

Lemme 7.2.1 *Sous la probabilité risque-neutre Q , l'espérance de rendement entre n et $n+1$ (compte tenu des informations disponibles à la n -ième période) est égale à $1+R$, soit*

$$E_Q(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = (1+R) S_n \quad (7.12)$$

Plus généralement, l'actif risqué actualisé $\widehat{S}_n = (1+R)^{-n} S_n$ est une martingale

$$E_Q(\widehat{S}_{n+h} | \mathcal{F}_n) = E_Q((1+R)^{-(n+h)} S_{n+h} | \mathcal{F}_n) = (1+R)^{-n} S_n = \widehat{S}_n.$$

7.2.2 Portefeuille autofinçant

Nous modélisons le comportement d'un investisseur qui, disposant d'un capital initial de $x\mathcal{€}$, l'investit dans l'action, tout en gardant (ou en empruntant) une part de son

capital à la banque. Nous supposons qu'il n'y a pas de coûts de transaction, que les ventes à découvert sont autorisées et qu'on peut acheter des fractions d'actions si nécessaire.

À la date ndt , le portefeuille de l'investisseur se compose de $\alpha_n(\omega)\text{€}$ à la banque et de $\delta_n(\omega)$ actions. Ces quantités, non nécessairement entières, peuvent être positives ou négatives suivant qu'elles correspondent à un achat ou à une vente. Elles résultent de décisions qui ont été prises à la date précédente.

L'information accessible à l'investisseur à la n -ième période se réduit à l'historique des cours de l'action; elle est modélisée par la tribu \mathcal{F}_n . Entre les périodes $n - 1$ et n , un investisseur qui suit la stratégie (α_n, δ_n) a placé à la date $(n - 1)dt$ *après renégociation* $\alpha_n \text{ €}$ à la banque et acheté (ou vendu) δ_n actions. Ces deux variables ne dépendent évidemment que de l'information disponible au moment où la décision est prise; ce sont donc des v.a. \mathcal{F}_{n-1} -mesurables. En fin de période, c'est-à-dire à la date n , le portefeuille se compose de ces quantités (α_n, δ_n) , qui après renégociation seront transformées en $(\alpha_{n+1}, \delta_{n+1})$. Nous retrouvons ainsi les notions de stratégies telles qu'elles ont été introduites au chapitre 6, dans la proposition 6.1.2, mais ce sont maintenant des stratégies *vectorielles*. La notion de processus de gain que nous avons introduite alors sera aussi très utile.

Nous pouvons maintenant donner un certain nombre de définitions qui permettent de préciser les outils les plus importants.

Définition 7.2.2 1. Une **stratégie de portefeuille** est la donnée des suites $(\varphi_n = (\alpha_n, \delta_n); n \leq N)$ *prévisibles* (donc α_0 et δ_0 sont constants), représentant les quantités en cash et actions dans le portefeuille à la date ndt .

2. La **valeur liquidative du portefeuille** (avant renégociation) vaut à la date ndt :

$$V_n(\varphi) = V_n(\alpha, \delta) = \alpha_{n+1} + \delta_{n+1} S_n. \quad (7.13)$$

En particulier si la richesse initiale x est donnée, $x = V_0$.

3. Le **processus de gain associé à cette stratégie** est

$$X_n(\varphi) = x + \alpha_1 R + \delta_1(S_1 - S_0) + \cdots + \alpha_n R + \delta_n(S_n - S_{n-1}); \quad (7.14)$$

4. Une stratégie de portefeuille est **autofinancante** si à toute date, valeur liquidative et processus de gain coïncident,

$$\forall n \in [0, N], \quad V_n(\varphi) = X_n(\varphi).$$

En particulier,

$$V_n(\varphi) - V_{n-1}(\varphi) = RV_{n-1}(\varphi) + \delta_n(S_n - S_{n-1} - RS_{n-1}). \quad (7.15)$$

5. Si $R = 0$, ou plus généralement si nous considérons les quantités actualisées $\widehat{V}_n(\varphi) = (1 + R)^{-n} V_n(\varphi)$ et $\widehat{S}_n = (1 + R)^{-n} S_n$, un portefeuille autofinçant actualisé vérifie

$$\widehat{V}_n(\varphi) = x + \delta_1(\widehat{S}_1 - \widehat{S}_0) + \cdots + \delta_n(\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n-1}). \quad (7.16)$$

C'est donc le processus de gain de la stratégie prévisible δ associée au processus \widehat{S} , soit avec les notations de 6.1.2 du chapitre 6, $\widehat{V}_n(\varphi) = \widehat{S}_n(\delta)$.

DÉMONSTRATION :

- ⇒ Entre les périodes $n - 1$ et n , un investisseur qui suit la stratégie (α, δ) a placé à la date $(n - 1)dt$ après renégociation $\alpha_n \mathfrak{€}$ à la banque et acheté (ou vendu) δ_n actions. Le gain de la stratégie entre $n - 1$ et n est avec les notations de la définition $X_n(\varphi) - X_{n-1}(\varphi) = \alpha_n((1 + R) - 1) + \delta_n(S_n - S_{n-1}) = \alpha_n R + \delta_n(S_n - S_{n-1})$.
- ⇒ À l'instant n , l'investisseur forme un nouveau portefeuille. Si aucune somme n'est investie (ou désinvestie) de manière exogène à l'instant n , il a une richesse $V_{n-1}(\varphi) + (X_n(\varphi) - X_{n-1}(\varphi))$ à renégocier. La stratégie est dite *autofinçante* et $V_n(\varphi) = \alpha_{n+1} + \delta_{n+1} S_n = V_{n-1}(\varphi) + (X_n(\varphi) - X_{n-1}(\varphi))$.
- ⇒ Nous pouvons décrire précisément uniquement en terme de quantités d'actif risqué le comportement du portefeuille,

$$\begin{aligned} V_n(\varphi) - V_{n-1}(\varphi) &= \alpha_n R + \delta_n(S_n - S_{n-1}) \\ &= R(\alpha_n + \delta_n S_{n-1}) + \delta_n(S_n - S_{n-1} - RS_{n-1}) \\ &= RV_{n-1}(\varphi) + \delta_n(S_n - S_{n-1} - RS_{n-1}). \end{aligned}$$

- ⇒ Si nous actualisons les portefeuilles, un simple calcul à partir de l'équation (7.15) montre que

$$\widehat{V}_n(\varphi) - \widehat{V}_{n-1}(\varphi) = \delta_n(\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n-1}).$$

Les propriétés du processus de gain d'une stratégie prévisible sont bien connues (Proposition 5.1.1). Énoncées sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , comme dans le modèle à deux périodes, elles permettent de montrer des propriétés de martingale pour l'actif risqué (7.2.1) et les valeurs liquidatives de portefeuille actualisés.

Proposition 7.2.3 *Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , l'espérance de rendement entre n et $n + 1$ d'un portefeuille autofinçant est égale, comme celle de l'action à $1 + R$, soit*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_{n+1}(\alpha, \delta) | \mathcal{F}_n) = (1 + R) V_n(\alpha, \delta).$$

Le portefeuille actualisé, $(1 + R)^{-n} V_n(\alpha, \delta)$ est une martingale sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

DÉMONSTRATION :

Par définition de la probabilité risque-neutre, nous avons vu au lemme 7.2.1 que l'actif risqué actualisé est une martingale. Puisque les stratégies de portefeuille sont prévisibles, $(\delta_n \in \mathcal{F}_{n-1})$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\widehat{V}_n(\phi) - \widehat{V}_{n-1}(\phi) | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \delta_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left((\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0.$$

Opportunités d'arbitrage

Comme nous l'avons vu dans le modèle à deux périodes, l'hypothèse "d'absence d'opportunité d'arbitrage" joue un rôle capital, tant dans la modélisation de la dynamique des prix des titres que pour l'évaluation des prix de produits dérivés dans la période $[0, Ndt]$.

Définition 7.2.4 *Une opportunité d'arbitrage est une stratégie de portefeuille autofinçante dont la valeur $V(\alpha, \delta)$ vérifie :*

- $\forall \omega V_0(\alpha, \delta)(\omega) = 0$;
- $\forall \omega V_N(\alpha, \delta)(\omega) \geq 0$ et $\exists \omega_0 V_N(\alpha, \delta)(\omega_0) > 0$.

Nous faisons dans le modèle à N périodes la même hypothèse que pour le modèle à 2 dates.

Hypothèse 7.2.5 *Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.*

Par conséquent, deux portefeuilles qui ont la même valeur après N périodes p.s., ont la même valeur financière à toute date intermédiaire n p.s.

DÉMONSTRATION :

Montrons la deuxième propriété.

Soient $\varphi = (\alpha, \delta)$ et $\varphi' = (\alpha', \delta')$ deux stratégies de portefeuille telles que

$\forall \omega$, $V_N(\varphi)(\omega) = V'_N(\varphi)(\omega)$ et supposons que $V_0(\varphi) > V_0(\varphi')$.

Soit $(\lambda, 0)$ la stratégie autofinancante, correspondant à un investissement initial de $[V_0(\varphi') - V_0(\varphi)]$ dans le cash, non renégociée entre 0 et N .

Après N périodes, sa valeur est de $V_N(\lambda, 0)(\omega) = [V_0(\varphi') - V_0(\varphi)](1 + R)^N$.

La stratégie Φ qui vaut $(\alpha - \alpha' + \lambda, \delta - \delta')$ est une opportunité d'arbitrage car, d'une part à l'instant 0, $V_0(\Phi)$ est nulle, et d'autre part, $V_N(\Phi)$ vaut :

$$V_N(\Phi)(\omega) = [V_0(\varphi) - V_0(\varphi')](1 + R)^N > 0.$$

Par un raisonnement analogue, on montre que si $V_T(\varphi)(\omega) \geq 0$ pour tout ω , alors $V_0(\varphi) \geq 0$. Le raisonnement ci-dessus s'adapte aussi pour toute date intermédiaire n .
□

Donnons tout de suite une conséquence importante en Finance de cette hypothèse.

Proposition 7.2.6 (Parité Call-Put). *Considérons une option d'achat (Call) et une option de vente (Put) écrites sur un même actif S , de maturité Ndt , et de prix d'exercice K . À la date n , les prix de ces deux options sont reliés par*

$$\text{Prime du Call}_n - \text{Prime du Put}_n = S_n - K(1 + R)^{-(N-n)}.$$

DÉMONSTRATION :

Dans cet exemple, l'actif S , le *Call* et le *Put* sont considérés comme des titres du marché, et donc soumis à la règle d'absence d'opportunité d'arbitrage.

À la date Ndt , le portefeuille *Call* - *Put* a une valeur liquidative en Ndt de $(S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ = S_N - K$.

Mais ce flux est aussi atteint par un portefeuille dont la valeur à la période n est $S_n - K$ (Prix en ndt de 1€ en Ndt). Par absence d'arbitrage, ces deux stratégies ont même valeur à toute date intermédiaire.

7.2.3 Évaluation et couverture

Il est aisé de généraliser les résultats sur l'évaluation et la couverture du modèle à deux périodes. Deux voies sont possibles. La première est complètement algébrique, et généralise au cas de N périodes le système d'équations linéaires introduit dans le modèles à deux périodes. La deuxième est probabiliste et utilise les propriétés de martingale du titre risqué et des portefeuilles actualisés.

Point de vue algébrique ou markovien

Nous nous proposons de montrer qu'il est possible de dupliquer un flux financier de la forme $F_N(S_N)$ à la date Ndt par un portefeuille autofinçant dont les poids à la n^e période sont des fonctions de n et de S_{n-1} .

UNE RÉCURRENCE RÉTROGRADE Les fonctions qui caractérisent la valeur du portefeuille et les différents poids sont calculés de manière réursive rétrograde (en partant de la fin) en résolvant une suite de systèmes linéaires analogues à celui du modèle à deux périodes.

Le premier est donné, pour toute valeur x prise par S_{N-1} par

$$\begin{aligned} F_N(hx) &= \alpha(N, x)(1 + R) + \delta(N, x)hx \\ F_N(bx) &= \alpha(N, x)(1 + R) + \delta(N, x)bx. \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit au prix d'une option délivrant le flux $(F_N(hx), F_N(bx))$ dans un modèle à une période, lorsque l'action est au niveau x . Grâce au corollaire 7.1.9, nous avons une formule explicite pour la solution, qu'on exprime aisément à l'aide du coefficient risque-neutre $q = \frac{(1 + R) - b}{h - b}$, ou du noyau de transition $\mathbf{Q}(S, dy) = q\delta_{Sh}(dy) + (1 - q)\delta_{Sb}(dy)$. Pour amorcer la récurrence, nous notons le prix $F_{N-1}(x)$. Nous avons donc,

$$\begin{cases} F_{N-1}(x) &= (1 + R)^{-1}(qF_N(hx) + (1 - q)F_N(bx)) = (1 + R)^{-1}\mathbf{Q}F_N(x) \\ \delta(N, x) &= \frac{F_N(hx) - F_N(bx)}{(h - b)x} \\ \alpha(N, x) &= (1 + R)^{-1}(F_N(hx) - \delta(N, x)hx). \end{cases} \tag{7.17}$$

La formulation utile pour la suite de ce résultat est la suivante.

Lemme 7.2.7 *Pour toute fonction F , notons*

$$\begin{cases} \mathbf{Q}F(x) &= qF(hx) + (1 - q)F(bx) \\ \Delta F(x) &= \frac{F(hx) - F(bx)}{(h - b)x} \\ \alpha(F)(x) &= \frac{1}{1 + R}(\mathbf{Q}F(x) - x\Delta F(x)). \end{cases} \tag{7.18}$$

Alors

$$\begin{cases} F(hx) &= \mathbf{Q}F(x) + \Delta F(x)(h - (1 + R))x \\ F(bx) &= \mathbf{Q}F(x) + \Delta F(x)(b - (1 + R))x. \end{cases} \tag{7.19}$$

Inversement, si deux fonctions F et G satisfont

$$\begin{cases} F(hx) - G(x) &= (h - (1 + R))x \Delta F(x) \\ F(bx) - G(x) &= (b - (1 + R))x \Delta F(x), \end{cases} \quad (7.20)$$

alors $G = \mathbf{Q}F$, et $(1 + R)^{-1}G(x)$ est la valeur du portefeuille qui réplique F dans un modèle à une période de paramètres $(\alpha(F)(x), \Delta F(x))$.

On peut réitérer le raisonnement à l'étape $N - 2$, à partir de la fonction F_{N-1} et ainsi de suite de proche en proche. Nous avons en particulier que

$$F_k(x) = (1 + R)^{-1} \mathbf{Q}F_{k+1}(x) = (1 + R)^{-(N-k)} \mathbf{Q}^{N-k} F_N(x).$$

UNE ANALYSE "FORWARD" Pour montrer que le prix de l'option en 0 est $F_0(S)$, il reste à montrer qu'en partant de cette richesse initiale, on peut générer un portefeuille autofinçant qui après N périodes réplique $F_N(S_N)$. On continue à exploiter les propriétés du modèle à deux périodes (dont les formules sont maintenant exprimées directement en termes de la v.a. S_1 , sans expliciter ses valeurs). D'après le lemme 7.2.7,

– l'égalité

$$F_1(S_1) = F_0(S_0)(1 + R) + \Delta F_1(S_0)(S_1 - (1 + R)S_0)$$

montre que la propriété de réplication est valable entre les périodes 0 et 1 ;

– de manière générale, l'égalité

$$\begin{aligned} F_k(S_k) &= F_{k-1}(S_{k-1})(1 + R) + \Delta F_k(S_{k-1})(S_k - (1 + R)S_{k-1}) \\ &= F_{k-1}(S_{k-1}) + R\alpha(F_k)(S_{k-1}) + \Delta F_k(S_{k-1})(S_k - S_{k-1}) \end{aligned}$$

montre la même propriété entre les dates $k - 1$ et k ;

– il suffit ensuite de sommer entre 0 et N pour voir que

$$F_N(S_N) = F_0(S_0) + \sum_{k=1}^N \alpha(F_k)(S_{k-1})R + \Delta F_k(S_{k-1})(S_k - S_{k-1})$$

qui est la valeur en N d'un portefeuille autofinçant répliquant dans tous les états du monde $F_N(S_N)$;

– par absence d'arbitrage, $F_0(S_0) = (1 + R)^{-N} \mathbf{Q}^N F_N(x)$ est l'unique prix de ce contrat.

Nous synthétisons ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 7.2.8 *Le prix d'une option européenne de maturité N et de pay-off $F_N(S_N)$ est donné à la date k par*

$$F_k(S_k) = (1 + R)^{N-k} \mathbf{Q}^{N-k} F_N(x).$$

Entre les étapes k et $k + 1$, le portefeuille de couverture est donné par

$$\delta_k = \Delta F_k(S_k) = \frac{F_k(hS_k) - F_k(bS_k)}{h - b}.$$

Sous cette forme, le calcul explicite n'est pas évident, mais la méthode récursive est très efficace sur un ordinateur ; elle permet en particulier de calculer dans la même récurrence le prix et les poids du portefeuille de couverture.

La méthode de martingales

En utilisant les propriétés d'un portefeuille autofinçant que réplique $F_N(S_N)$ (s'il existe), nous voyons par la propriété de martingale de sa valeur actualisée $(1 + R)^{-k} V_k$ sous la probabilité \mathbf{Q} (Proposition 7.2.3) que nécessairement,

$$V_k = (1 + R)^{-(N-k)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(F_N(S_N) | \mathcal{F}_k).$$

Nous utilisons maintenant la propriété de Markov du processus de prix (S_n) , sous la probabilité risque-neutre, pour montrer que la valeur du portefeuille répliquant (s'il existe) est une fonction déterministe de (k, S_k) , qui est égale à la fonction $F_k(x)$ que nous avons calculée ci-dessus

$$V_k = (1 + R)^{-(N-k)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(F_N(S_N) | S_k) = (1 + R)^{N-k} \mathbf{Q}^{N-k} F_N(S_k) = F_k(S_k).$$

Il reste à montrer que $F_k(S_k)$ est bien la valeur d'un portefeuille autofinçant, à partir de cette seule information.

Le lemme 7.2.7 permet de répondre rapidement à ce problème. En effet, par construction $(1 + R)F_k(x) = \mathbf{Q}F_{k+1}(x)$, et donc le lemme s'applique aux fonctions F_{k+1} et F_k , ce qui nous permet de montrer que la réplication est valable entre les périodes $k - 1$ et k ,

$$\begin{aligned} F_k(S_k) &= F_{k-1}(S_{k-1})(1 + R) + \Delta F_k(S_{k-1})(S_k - (1 + R)S_{k-1}) \\ &= F_{k-1}(S_{k-1}) + R\alpha(F_k)(S_{k-1}) + \Delta F_k(S_{k-1})(S_k - S_{k-1}). \end{aligned}$$

Il reste à sommer sur k les variations $F_k(S_k) - F_{k-1}(S_{k-1})$ pour obtenir la formule de réplication et justifier la formule d'évaluation.

Nous avons donc retrouvé les résultats du calcul algébrique, ainsi que la capacité de calculer explicitement le prix de l'option à la date 0 en exploitant les propriétés de la loi risque-neutre du sous-jacent à maturité. Nous en déduisons le théorème :

Théorème 7.2.9 Soit $q = \frac{(1+R)-b}{h-b}$. La valeur en 0 d'une option dont le flux à la N -ième période est de $F_N(S_N)$ est

$$F_0(S) = \mathbb{E}_Q[(1+R)^{-N}F(S_N)] = (1+R)^{-N} \left(\sum_{j=0}^N C_N^j q^j (1-q)^{N-j} F(S h^j b^{N-j}) \right) \quad (7.21)$$

Le portefeuille de couverture en 0 s'obtient en calculant la dérivée discrète

$$\Delta F_0(S) = \frac{F_0(S h) - F_0(S b)}{(h-b)S} = \mathbb{E}_Q \left((1+R)^{-N} \frac{F(hS_N) - F(bS_N)}{(h-b)S} \right). \quad (7.22)$$

DÉMONSTRATION :

Nous avons vu que $F_0(S) = \mathbb{E}_Q[(1+R)^{-N}F(S_N)]$.

Or $S_N = S h^{Z_N} b^{N-Z_N}$, où Z_N suit sous la probabilité Q une loi binomiale de paramètres (N, q) . La formule explicite en résulte.

Nous avons vu que les contrats d'option de type options d'achat et options de vente jouent un rôle fondamental en finance. Leur évaluation spécifique est donc particulièrement importante.

Corollaire 7.2.10 (La formule de Black et Scholes discrète). Les options d'achat et de vente ont des flux terminaux de la forme $(x - K)^+$ et $(K - x)^+$.

Introduisons les fonctions de répartition $G_N(x) = \mathbb{Q}(Z_N \geq x)$ et $\tilde{G}_N(x) = \tilde{\mathbb{Q}}(Z_N \geq x)$ des lois binomiales de paramètres $q = \frac{1+R-b}{h-b}$ et $\tilde{q} = \frac{h}{1+R}q = \frac{(1+R)h - bh}{(1+R)h - (1+R)b}$.

Le prix de l'option d'achat est donné par

$$Call(0, S) = S \tilde{G}_N(z_N) - K(1+R)^{-N} G_N(z_N), \quad (7.23)$$

où $z_N \ln(h/b) = \ln(K/S) - N \ln b$.

La dérivée discrète n'a pas de forme simple, mais on peut donner un encadrement faisant intervenir les nombres $z_N^h = z_N - \frac{\ln h}{\ln h/b}$ et $z_N^b = z_N - \frac{\ln b}{\ln h/b}$, de telle sorte que

$$\tilde{G}_N(z_N^b) \leq \Delta C_0(S) \leq \tilde{G}_N(z_N^h).$$

La parité Call-Put permet de déduire sans calcul le prix du Put.

DÉMONSTRATION :

Nous pouvons linéariser le flux terminal d'une option d'achat ou *Call* en faisant intervenir l'ensemble d'exercice $\mathcal{E} = \{S_N \geq K\} = \{Z_N \ln(h/b) \geq \ln(K/S) - N \ln b\} = \{Z_N \geq z_N\}$, où z_n est le nombre introduit dans l'énoncé.

Le prix de l'option se décompose en $F_0(S) = (1+R)^{-N} \left(\mathbb{E}_Q(S_N \mathbf{1}_{\mathcal{E}}) - KQ(\mathcal{E}) \right)$.

⇒ Le deuxième terme de cette expression se calcule explicitement à partir de $Q(\mathcal{E}) = G_N(z_N)$.

⇒ Le premier terme peut être transformé de manière à faire encore apparaître une fonction de répartition. Pour cela on remarque que $\mathbb{E}_Q\left((1+R)^{-N} S_N\right) = S$ par la propriété de martingale de l'actif actualisé. Par suite,

$$(1+R)^{-N} \mathbb{E}_Q(S_N \mathbf{1}_{\mathcal{E}}) = S \tilde{Q}(\mathcal{E}),$$

où \tilde{Q} est la probabilité qui admet une densité produit de la forme

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = (1+R)^{-N} (S_N/S) = \left(\frac{b}{1+R} \right)^N (h/b)^{Z_N} = \prod_{i=1}^N \frac{b}{1+R} (h/b)^{Y_i}.$$

Sous la probabilité \tilde{Q} , les v.a. Y_j sont des v.a. de Bernoulli indépendantes, et de probabilité de hausse

$$\tilde{q} = \tilde{Q}(Y_i = 1) = \frac{b}{1+R} \mathbb{E}_Q\left((h/b)^{Y_i} \mathbf{1}_{\{Y_i=1\}}\right) = \frac{h}{1+R} q = \frac{h}{1+R} \frac{(1+R) - b}{h - b}.$$

Comme $h > 1+R$, on vérifie que $q < \tilde{q} < 1$.

⇒ Pour étudier la dérivée discrète, le plus simple est de revenir à la définition du prix sous forme d'espérance.

$$\Delta C_0(x) = \frac{C_0(hx) - C_0(bx)}{x(h-b)} = \frac{(1+R)^{-N}}{x(h-b)} \mathbb{E}_Q\left((hS_N - K)^+ - (bS_N - K)^+\right)$$

Comme la fonction $(x-K)^+$ est convexe, nous avons l'encadrement suivant valable pour tout $x \geq y$

$$\mathbf{1}_{\{y \geq K\}}(x-y) \leq (x-K)^+ - (y-K)^+ \leq \mathbf{1}_{\{x \geq K\}}(x-y).$$

Appliquées aux valeurs aléatoires hS_N et bS_N , ces inégalités jointes à la définition de ΔC_0 conduisent à introduire naturellement la probabilité \tilde{Q} ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q\left(\frac{(1+R)^{-N}}{x(h-b)}(hS_N - bS_N)\mathbf{1}_{\{bS_N \geq K\}}\right) &\leq \Delta C_0(x) \leq \mathbb{E}_Q\left(\frac{(1+R)^{-N}}{x(h-b)}(hS_N - bS_N)\mathbf{1}_{\{hS_N \geq K\}}\right) \\ \tilde{Q}(bS_N \geq K) &\leq \Delta C_0(x) \leq \tilde{Q}(hS_N \geq K) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi prouvé l'inégalité annoncée. \square

Quelques exemples de stratégies utilisant les options

VENTE À DÉCOUVERT PROTÉGÉE PAR DES OPTIONS D'ACHAT

Un investisseur anticipant une baisse des cours de l'action XYZ vend le 12 Mai 2004 à découvert 1000 actions, qui se négocient au cours de 40,5 €. Il espère profiter d'une baisse en rachetant ultérieurement ces actions qu'il a vendues pour un prix total de 40500 €.

Pour se protéger contre une hausse du cours qui lui serait très défavorable, il achète des options d'achat d'échéance septembre 2004, de prix d'exercice 40€. Le prix dans le marché de ces options est de **2,20€**. La protection lui coûte donc 2,220€.

Le 13 septembre 2004 le prix des actions XYZ monte à 44€. Il exerce son option d'achat et rachète ses actions à 40€, au lieu des 44 du marché.

Notons que la perte totale de l'investisseur due à ses prévisions erronées se limite à 170.000€, alors que s'il ne s'était pas protégé, il aurait perdu le double dans cette configuration de marché.

ACHAT D'OPTIONS DE VENTE COMME ASSURANCE CONTRE LA BAISSSE

Le même investisseur observe que les 1000 actions XYZ qu'il possède ont considérablement augmentées, jusqu'à 64€ l'unité. Il ne souhaite pas les vendre, mais voudrait se protéger contre un réajustement brutal du marché. Le 26 août 2004, il achète à **3,20€** des options de vente de prix d'exercice 64, d'échéance décembre 2004. Il assure donc son portefeuille pour une prime de 2%.

- Le 15 novembre, l'action baisse de 6€, en passant à 26€, alors que la valeur de l'*option de vente* est passée à **12€**. Il décide de profiter de la hausse de la prime, en revendant ses options de vente. Il gagne dans l'opération 8800€, tout en ayant une perte de 12000 sur ces actions. La perte nette finale est donc de 3200€.
- Autre scénario : l'action monte à 80€. Il gagne sur l'opération 16000€, alors qu'il s'est assuré pour 3200€.

La stratégie de couverture a joué son rôle sans trop émousser les gains.

Calibration

L'évaluation des produits dérivés se ramène donc à connaître la probabilité Q risque-neutre, et donc les niveaux h et b . Le taux d'intérêt R est a priori connu.

Pour calibrer ces paramètres sur des données de marché, il est bien d'avoir quelques

repères sur le lien entre ces paramètres et des paramètres de risque, puisque nous savons que dans l'univers risque-neutre le rendement moyen est connu.

Dans l'univers risque neutre, on vérifie facilement que la variance de S_1 est donnée $\text{Var}_Q(S_1) = S_0^2(h - b)^2q(1 - q)$. Elle est donc majorée par $1/4S_0^2(h - b)^2$. La différence $1/2(h - b)$ est donc une mesure de l'écart-type du rendement à une période de temps. Comme le phénomène est multiplicatif, on considérera souvent un mouvement symétrique au sens où $h = (1 + R)u$, $b = (1 + R)u^{-1}$. Dans ce cas, $q = (1 + u)^{-1}$, $1 - q = \frac{u}{u+1}$ et il ne reste plus qu'un paramètre à identifier.

Dans la pratique, le marché ne fait pas une estimation historique du niveau moyen de hausse et de baisse dans une journée. Il utilise l'information contenue dans les prix d'option des marchés organisés pour trouver les paramètres h et b ou plus simplement le paramètre u tel que le prix de l'option dans le modèle binomial coïncide avec le prix observé. Il utilisera ensuite cette information pour calculer la quantité d'actif risqué qu'il doit détenir pour se couvrir. On dit qu'il fait de la CALIBRATION IMPLICITE. Cette pratique prendra tout son sens dans le modèle asymptotique que nous étudierons ci-dessous.

7.3 Options américaines et arrêt optimal

Introduction

Dans les marchés anglo-saxons, et pour un grand nombre de contrats vendus sur Euronext, les contrats d'options diffèrent des options que nous avons étudiées jusqu'ici :

*l'exercice de l'option peut avoir lieu à n'importe quelle date entre aujourd'hui et l'échéance du contrat. On dit que le contrat est **américain**, alors que les options qui ne peuvent être exercées qu'à maturité sont appelées **euro-péennes**.*

Comment évaluer de telles options, qui donnent un droit supplémentaire à l'acheteur, et qui font supporter un risque supplémentaire au vendeur, celui de l'exercice anticipé ? De nombreux auteurs dont Brennan et Schwartz [39].

Deux idées se rejoignent :

1. d'une part le prix doit être au moins égal à celui d'un contrat qui s'arrêterait à

n'importe quelle date (temps d'arrêt) entre 0 et N dt l'échéance du contrat

$$F_0^{Am}(S) = \sup_{\tau \text{ t.a.} \leq N} \mathbb{E}_Q((1+R)^{-\tau} F(S_\tau)).$$

Le symbole *t.a.* décrit comme d'habitude un temps d'arrêt (définis en 5.1.3.), c'est-à-dire une v.a. τ , dont les valeurs n'anticipent pas sur le futur du processus : $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Le prix américain $F_0^{Am}(S)$ apparaît comme le gain maximal associé à un problème d'arrêt optimal (section 5.4.2). Les flux espérés sont de la forme $\Phi(n, S_n)$, mais doivent être actualisés pour définir le gain réel, $Y_n = \widehat{\Phi}(n, S_n) = (1+R)^{-n} \Phi(n, S_n)$.

2. D'autre part, le vendeur de l'option doit pouvoir couvrir le risque d'exercice anticipé, éventuellement à l'aide de provisions (en cash). La couverture recherchée n'est plus seulement un portefeuille autofinçant, mais un portefeuille avec "consommation" comme nous le préciserons ci-dessous.

7.3.1 Étude du problème d'arrêt optimal

L'étude repose sur les résultats de la section 5.4.2, appliqués à la chaîne de Markov (S_n) sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} de noyau de transition $\mathbf{Q}(S, dy) = q\delta_{Sh}(dy) + (1-q)\delta_{Sb}(dy)$, $q = \frac{1+R-b}{h-b}$.

Remarquons tout de suite que les options d'achat et les options de vente se comportent très différemment du point de vue de l'exercice anticipé.

Lemme 7.3.1 *Il n'est jamais optimal d'exercer une option d'achat avant l'échéance.*

DÉMONSTRATION :

Nous proposons deux types de preuve :

- ⇒ La première repose sur le fait que par suite de la parité Call-Put, à toute date n une option d'achat a un prix strictement positif, et strictement plus grand que $(S_n - K(1+R)^{-n})^+ \geq (S_n - K)^+$. Il est donc toujours préférable d'attendre.
- ⇒ Un argument plus probabiliste utilise le fait que sous la probabilité risque-neutre $(1+R)^{-n}(S_n - K)$ est une sous-martingale comme somme d'une martingale $(1+R)^{-n}S_n$ et d'un processus croissant $-K(1+R)^{-n}$. D'après l'inégalité de Jensen, sa partie positive est aussi une sous-martingale, et pour tout t.a. $\tau \leq N$,

$$\mathbb{E}_Q\left((1+R)^{-\tau}(S_\tau - K)^+\right) \leq \mathbb{E}_Q\left((1+R)^{-N}(S_N - K)^+\right) = \text{Call}_0^{\text{Eur}}(S).$$

Dans le cas général, le corollaire 5.4.3. donne un procédé récursif pour calculer le prix américain d'un titre dont le processus de gain est $Y_n = (1 + R)^{-n}\Phi(S_n)$.

Proposition 7.3.2 *Soit l'algorithme rétrograde défini par :*

$$F_N^{\text{Am}}(x) = \Phi(x), \quad F_k^{\text{Am}}(x) = \max((1 + R)^{-1}\mathbf{Q}F_{k+1}^{\text{Am}}(x), \Phi(x)). \quad (7.24)$$

a) $Z_n = (1 + R)^{-n}F_n^{\text{Am}}(S_n)$ est la plus petite surmartingale qui majore $(1 + R)^{-n}\Phi(S_n)$

b) Il existe un t.a. optimal τ^* défini comme

$$\begin{aligned} \tau^* &= \inf\{n \mid F_n^{\text{Am}}(S_n) = \Phi(S_n)\} \wedge N \quad \text{et} \\ F_0^{\text{Am}}(S) &= \mathbf{E}_Q((1 + R)^{-\tau^*}\Phi(S_{\tau^*})). \end{aligned} \quad (7.25)$$

c) (Critère d'optimalité :) un temps d'arrêt τ est optimal si et seulement si

$$F_\tau^{\text{Am}}(S_\tau) = \Phi(S_\tau) \quad \text{et} \quad Z_{n \wedge \tau} \text{ est une martingale.}$$

Le Put américain ($\text{Put}_n^{\text{Am}}(S)$) de flux $\Phi(S) = (K - S)^+$ a des propriétés spécifiques

1. la fonction $S \rightarrow \text{Put}_n^{\text{Am}}(S)$ est décroissante et convexe ;
2. l'ensemble d'exercice à la date n , $\mathcal{E}_n = \{x \mid \text{Put}_n^{\text{Am}}(x) = (K - x)^+\}$ est un intervalle de la forme $[0, K^*(n)]$ et pour $S \in]K^*(n), K b^{-(N-n)}]$ alors $\text{Put}_n^{\text{Am}}(S) > (K - S)^+$;
3. la suite $K^*(n)$ s'appelle la frontière d'exercice. On peut montrer que c'est une fonction croissante telle que $K^*(N) = K$, $K^*(N - 1) = \frac{K}{h}(1 + \frac{R}{q}) < K$ car $h > (1 + R)$.

7.3.2 Étude de la couverture

Nous nous proposons de mettre en évidence un portefeuille de couverture qui réplique au mieux les flux de l'option américaine. Pour cela nous utilisons les propriétés des fonctions dégagées au lemme 7.2.7.

Proposition 7.3.3 *Le processus de prix de l'option américaine peut se décomposer en un portefeuille autofinçant moins un processus de coût,*

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{\text{Am}}(S_{n+1}) &= (1 + R)F_n^{\text{Am}}(S_n) + \Delta F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n)(S_{n+1} - (1 + R)S_n) \\ &\quad - \left((1 + R)\Phi(S_n) - \mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) \right)^+, \end{aligned} \quad (7.26)$$

- les deux premiers termes de la somme représentent la variation de valeurs d'un portefeuille autofinçant, contenant $\Delta F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n)$ parts d'actif risqué à l'instant n ;
- le dernier terme représente les provisions qui doivent être prélevées si on est dans la région d'arrêt, mais que l'option n'a pas été exercée. Notons que cette région est incluse dans l'ensemble $\{x \mid \mathbf{Q}\Phi(x) \leq (1+R)\Phi(x)\}$;
- en particulier, avant le temps optimal d'exercice τ^* , le prix de l'option américaine est la valeur de marché d'un portefeuille autofinçant.

DÉMONSTRATION :

Par le lemme 7.2.7, nous voyons que

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}^{\text{Am}}(S_{n+1}) &= \mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) + \Delta F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) \left(S_{n+1} - (1+R)S_n \right) \\
 F_{n+1}^{\text{Am}}(S_{n+1}) &= (1+R)F_n^{\text{Am}}(S_n) + \Delta F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) \left(S_{n+1} - (1+R)S_n \right) \\
 &\quad + \left(\mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) - \max(\mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n), (1+R)\Phi(S_n)) \right) \\
 &= (1+R)F_n^{\text{Am}}(S_n) + \Delta F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) \left(S_{n+1} - (1+R)S_n \right) \\
 &\quad - \left((1+R)\Phi(S_n) - \mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n) \right)^+
 \end{aligned}$$

car $(1+R)F_n(S_n) = \max(\mathbf{Q}F_{n+1}^{\text{Am}}(S_n), (1+R)\Phi(S_n))$.

Comme $F_{n+1}^{\text{Am}} \geq \Phi$ cette dernière inégalité, ne peut avoir lieu que si $\mathbf{Q}\Phi(S_n) \leq (1+R)\Phi(S_n)$.

Les autres propriétés sont des simples conséquences de cette décomposition.

7.4 Les modèles "asymptotiques"

Une question naturelle est d'étudier le comportement du modèle précédent quand les instants de cotation deviennent de plus en plus rapprochés, ce qui est notamment le cas de la cotation continue par ordinateur. Ainsi, pour une option à trois mois, si l'intervalle de référence est la minute, il faut prendre $N = 129600$. Il est donc intéressant d'étudier le modèle asymptotique associé à une telle situation.

Nous supposons que nous avons un horizon de gestion de T , fractionné en N périodes de longueur T/N , et ferons tendre N vers $+\infty$ en laissant T fixé.

7.4.1 La formule de Black et Scholes

Nous reprenons le modèle précédent en notant (R_N, h_N, b_N, q_N) les paramètres du modèle à N périodes, correspondant à une période de temps $dt_N = T/N$ et un horizon $T = Ndt_N$.

- Puisque $1 + R_N$ représente le rendement de l'argent dans la période $dt_N = T/N$, il est naturel de supposer que : $(1 + R_N)^N \rightarrow e^{rT}$ si $N \rightarrow +\infty$ soit encore, $\frac{N}{T} \ln(1 + R_N) \rightarrow r$, ce qui implique que $R_N = rT/N + o(1/N)$.
- De même, il est naturel de supposer que le logarithme du rendement de l'actif ait une espérance et une variance (sous la probabilité risque-neutre) qui ont des limites finies lorsque $N \rightarrow +\infty$, soit que

$$E_{Q_N}(Z_N) \ln(h_N/b_N) + N \ln b_N = Nq_N \ln(h_N/b_N) + N \ln b_N$$

$$\text{var}[\ln(S_N)] = N [\ln(h_N/b_N)]^2 q_N(1 - q_N)$$

ont des limites finies. Ceci est notamment satisfait si

$$1 + R_N = e^{rT/N}, \quad h_N = e^{rT/N + \sigma\sqrt{T/N}}, \quad b_N = e^{rT/N - \sigma\sqrt{T/N}}.$$

Proposition 7.4.1 *Sous les hypothèses précédentes,*

1. *la suite de variables aléatoires $U_N = \frac{Z_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}}$ converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée réduite U . En particulier pour toute fonction h , continue et bornée,*

$$E_Q\left(h\left(\frac{Z_N - Nq_N}{\sqrt{Nq_N(1-q_N)}}\right)\right) \rightarrow \int h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(y^2/2)) dy ;$$

2. *la suite de v.a. $S_N^{(N)}$ converge en loi vers la v.a.*

$$S_T = S_0 \exp\left(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}U\right).$$

DÉMONSTRATION :

\Rightarrow Convergence de q_N .

Sous les hypothèses précédentes, on peut faire un développement limité de q_N et montrer que

$$q_N = \frac{1 + R_N - b_N}{h_N - b_N} = \frac{1 - \exp(-\sigma\sqrt{T/N})}{\exp(\sigma\sqrt{T/N}) - \exp(-\sigma\sqrt{T/N})} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{T}{N}}\right) + o\left(\sqrt{\frac{T}{N}}\right) \rightarrow 1/2. \quad (7.27)$$

⇒ *Convergence de la transformée de Laplace de U_N*

Puisque sous \mathbb{Q}_N , la v.a. Z_N suit une loi binomiale de paramètre (N, q_N) , pour tout nombre réel s

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N} \left(e^{s U_N} \right) = \left(q_N \exp \left(s \frac{1 - q_N}{\sqrt{N q_N (1 - q_N)}} \right) + (1 - q_N) \exp \left(s \frac{-q_N}{\sqrt{N q_N (1 - q_N)}} \right) \right)^N$$

Comme dans le théorème de de Moivre-Laplace classique, qui correspond à $q_N = 1/2$, cette fonction converge vers $\exp(\frac{1}{2} s^2)$ qui est la transformée de Laplace de la loi gaussienne de densité $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -(y^2/2)$.

⇒ *Convergence en loi des U_N*

Il reste à appliquer l'équivalence entre convergence des transformées de Laplace et convergence en loi pour conclure.

La convergence en loi est, comme il est rappelé dans l'appendice, la convergence des espérances des fonctions continues bornées des variables considérées.

⇒ *Étude de la transformation $\ln S_N^{(N)} = \ln(S_0) + \mu_N T + \sigma_N \sqrt{T} U_N$*

Revenons à S_N par l'intermédiaire de son logarithme

$$\begin{aligned} X_N^{(N)} &= \ln(S_N^{(N)}) = \ln(S_0) + Z_N \ln(h_N/b_N) + N \ln b_N \\ &= \ln(S_0) + rT + 2\sigma \sqrt{T/N} (Z_N - N/2) \\ &= U_N (2\sigma \sqrt{T/N} \sqrt{N q_N (1 - q_N)}) + 2\sigma \sqrt{T/N} (N q_N - N/2) + \ln(S_0) + rT \\ &= \ln(S_0) + \mu_N T + \sigma_N \sqrt{T} U_N. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $\sigma_N \sqrt{T} = 2\sigma \sqrt{T/N} \sqrt{N q_N (1 - q_N)} \rightarrow \sigma \sqrt{T}$.

D'autre part, d'après (7.27) $\mu_N T = rT + 2\sigma \sqrt{T/N} (N q_N - N/2) \rightarrow -\frac{1}{2} \sigma^2 T = \mu T$.

⇒ *Convergence en loi des $\ln(S_N^{(N)})$.*

Le plus simple est de montrer que la transformée de Fourier (de préférence à Laplace car c'est une fonction bornée) de $X_N^{(N)}$ converge vers celle de X_T .

Remarquons tout d'abord que la convergence des suites μ_N et σ_N permet de les majorer par des constantes positives μ^* et σ^* .

D'autre part, comme l'exponentielle complexe est dérivable de dérivée de module ≤ 1 , pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\left| \exp i u (\mu_N T + \sigma_N \sqrt{T} y) - \exp i u (\mu T + \sigma \sqrt{T} y) \right| \\ &\leq |u| \left(|\sigma_N - \sigma| \sqrt{T} |y| + T |\mu_N - \mu| \right) \\ &\leq |u| \left(|\sigma_N - \sigma| \sqrt{T} K + T |\mu_N - \mu| \right) + |u| 2\sigma^* \sqrt{T} |y| \mathbf{1}_{\{|y| \geq K\}} \end{aligned}$$

Il reste à observer que les v.a. U_N étant d'espérance nulle sous \mathbb{Q}_N et de variance 1, d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N} \left(|U_N| \mathbf{1}_{\{|U_N| \geq K\}} \right) \leq \frac{1}{K}.$$

Prenons maintenant l'espérance dans les inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{Q_N} \left| \exp i u (\mu_N T + \sigma_N \sqrt{T} y) - \exp i u (\mu T + \sigma \sqrt{T} y) \right| \\ & \leq |u| \left(|\sigma_N - \sigma| \sqrt{T} K + T |\mu_N - \mu| \right) + |u| 2\sigma^* \sqrt{T} \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Il reste à faire tendre d'abord $N \rightarrow +\infty$ et ensuite $K \rightarrow +\infty$ pour conclure que la transformée de Fourier de la suite $\ln(S_N^{(N)})$ converge vers la transformée de Fourier de X_T .

La formule de Black et Scholes en temps continu

Le prix des options dont les flux à maturité sont des fonctions bornées du sous-jacent (ou plus généralement des fonctions à croissance linéaire) convergent vers le prix asymptotique de l'option.

Théorème 7.4.2 *Soit $F_T(S)$ une fonction continue à croissance au plus linéaire. Sous les hypothèses précédentes, les prix discrétisés $F^N(0, S_0) = \mathbb{E}_{Q^N}[(1 + R_N)^{-N} F_T(S_N)]$ convergent vers une limite qui est le prix asymptotique de l'option. Ce prix est donné par la formule de Black-Scholes (continue)*

$$F_0(S) = \int e^{-rT} F(S e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}y}) g(y) dy \quad (7.28)$$

La dérivée discrète de la fonction F_0^N ,

$$\Delta^N F_0(S) = \frac{F_0^N(S h_N) - F_0^N(S b_N)}{(h_N - b_N)S} \rightarrow \lim_{u \downarrow 1} \frac{F(Su) - F(Su^{-1})}{S(u - u^{-1})}$$

qui la dérivée $F'_0(S)$ de la fonction $F_0(S)$.

La preuve de la propriété de convergence des dérivées discrètes vers la dérivée continue est laissée au lecteur ...

La formule de Black et Scholes concerne plus spécifiquement les prix des options d'achat (*Call*) et ou de vente (*Put*), que nous explicitons ci-dessous en utilisant \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Théorème 7.4.3 (Formule de Black et Scholes) 1. Le prix d'un Call de maturité T et de prix d'exercice K est donné par

$$\begin{cases} \text{Call}(t, x, K, T) &= x \mathcal{N}[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)] - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K)] \\ d_0(t, x, y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \\ d_1(t, x, y) &= d_0(t, x, y, \sigma^2) + \sigma\sqrt{t}. \end{cases} \quad (7.29)$$

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\Delta(t, S_t) = C'_x(t, S_t, T, K) = \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{r(T-t)}, K)]$$

parts de l'actif risqué.

3. De même, le prix d'un Put de mêmes caractéristiques est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{P}(t, x, K, T) &= K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, xe^{r(T-t)})] - x \mathcal{N}[d_0(T-t, K, xe^{r(T-t)})] \\ \Delta(t, S_t) &= \mathcal{P}'_x(t, S_t, T, K) = -\mathcal{N}[d_0(T-t, K, S_t e^{r(T-t)})]. \end{cases} \quad (7.30)$$

7.4.2 Le mouvement brownien

L'étude asymptotique que nous venons de faire étudie le comportement à maturité d'un processus qui a été discrétisé à partir de cette date. Il s'agit donc de l'étude asymptotique de v.a. Le problème est donc d'étudier ce qui se passe à une date quelconque t entre 0 et T dans ces comportements limites? Pour une étude plus détaillée, voir par exemple la présentation très plaisante de Pagès et Bouzitat [?].

Dans son article *Théorie de la spéculation* paru en 1900 aux Annales de l'École Normale Supérieure ([37]), Louis Bachelier répond le premier à ces questions, en notant qu'il est naturel d'associer à la suite qui décrit le nombre de hausses dans un intervalle $[0, T]$, la fonction continue définie de la façon suivante :

pour tout $k \leq N$, soit $V_k^{(N)} = \sqrt{\frac{T}{Nq_N(1-q_N)}}(Z_k - kq_N)$ la suite recentrée du nombre de hausses en k périodes, partiellement réduite de sorte que $\text{Var}_{\mathbb{Q}_N}(W_k^{(N)}) = k\frac{T}{N}$.

Le processus continu associé au nombre de hausses dans l'intervalle $[0, t]$ est défini comme l'ordonnée du point d'abscisse t du segment de droite qui joint les points $(\frac{kT}{N}, V_k^{(N)})$ et $(\frac{(k+1)T}{N}, V_{k+1}^{(N)})$, pour tous les t de l'intervalle

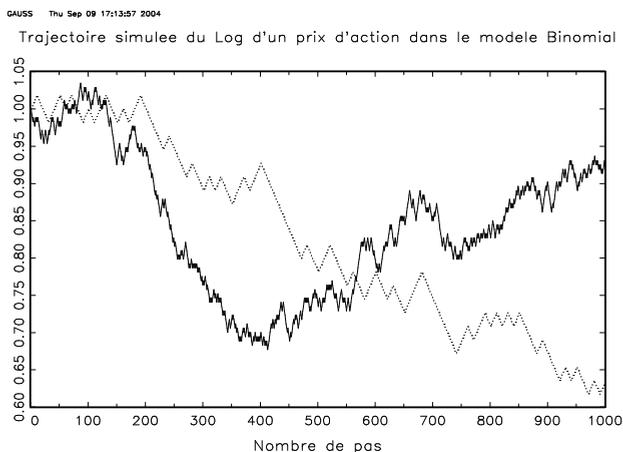


FIG. 7.7 – Trajectoires binomiales avec différents pas de temps.

$[kT/N, (k+1)T/N[$.

$$\begin{aligned} W_t^{(N)} &= V_k^{(N)} + \frac{t-kT/N}{T/N} (V_{k+1}^{(N)} - V_k^{(N)}), \\ &= V_k^{(N)} + (tN/T - k) \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{NqN(1-qN)}} (Y_{k+1}^{(N)} - qN) \end{aligned} \quad (7.31)$$

On peut montrer que cette suite de fonctions aléatoires converge en loi (sur l'espace des fonctions continues, muni de la topologie de la convergence uniforme) vers une fonction aléatoire, appelée **mouvement brownien**, ou **processus de Wiener** et notée $(W_t(\cdot); t \in \mathbb{R}^+)$.

Les propriétés essentielles du nombre de hausses se retrouvent dans cette fonction aléatoire limite :

- W_t suit une loi gaussienne de moyenne 0 et de variance t ;
- $W_{t+s} - W_t$ est indépendant de ce qui s'est passé dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et a même loi que W_s (ce qui se passe dans un intervalle de temps $[t, t+s]$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle) ;

- pour un état du monde donné ω , la fonction $\omega \rightarrow W_t(\omega)$ est continue sur $[0, T]$.

En temps discret, le cours de l'actif était une fonction multiplicative du nombre de

montées. Cette propriété est conservée à la limite, sous la forme, pour tout $t \in [0, T]$,

$$S_t = S e^{rT} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

On dit alors que l'actif suit **un mouvement brownien géométrique**.

S satisfait à une **équation différentielle stochastique** de la forme

$$dS_t = S_t[r dt + \sigma dW_t].$$

Toutes les notions introduites en temps discret, peuvent être généralisées au temps continu, en utilisant le **calcul stochastique** et la théorie des **martingales** (voir par exemple [5], [6], [21]).

Remarque 7.4.4 *On peut développer une théorie du portefeuille en temps continu, qui justifie par un argument de réplcation que le prix asymptotique est bien la valeur d'un portefeuille autofinçant, qui réplique les flux garantis par le produit dérivé. Bien que l'actif prenne une infinité de valeurs, par une gestion continue en temps, on peut le répliquer. Ceci est assez surprenant si on se réfère aux difficultés observées dans les remarques relatives aux marchés incomplets.*

Cette théorie mathématique ne s'est pas développée pour répondre à des problèmes issus de la Finance, car malgré les intuitions extraordinaires de Louis Bachelier développées dans sa thèse sur la "Théorie de la spéculation" (1900), ces idées n'ont été reprises en Finance que dans les années 1970, aux États-Unis d'abord avec Samuelson et Merton, dans le monde entier ensuite.

Albert Einstein en 1905 introduit, sans connaître les travaux de L. Bachelier, cette fonction aléatoire pour modéliser le mouvement "imprévisible" des électrons et établit le lien entre cette fonction aléatoire et l'équation de la chaleur. Mais il faut attendre 1924, pour que Norbert Wiener propose un formalisme permettant d'en mener une étude rigoureuse et constructive. Depuis de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de la théorie du calcul stochastique, et de ses applications à de nombreuses disciplines telles, que la physique, la biologie, la finance, et d'autres branches des mathématiques. L'Ecole française a su maintenir un rôle de premier plan dans ce domaine.

Laissons à Louis Bachelier conclure cet exposé sur les mathématiques de la Finance, par une phrase qui traduit la propriété de martingale des prix des actifs :

puisque sur les produits financiers on peut trouver des acheteurs et des vendeurs, le "marché" n'anticipe de manière sûre ni un mouvement de hausse ni un mouvement de baisse. En d'autres termes, le modèle que nous avons développé suppose que le jeu financier est "équitable"...

◇

... Pour en savoir plus ...

7.5 Quelques problèmes numériques

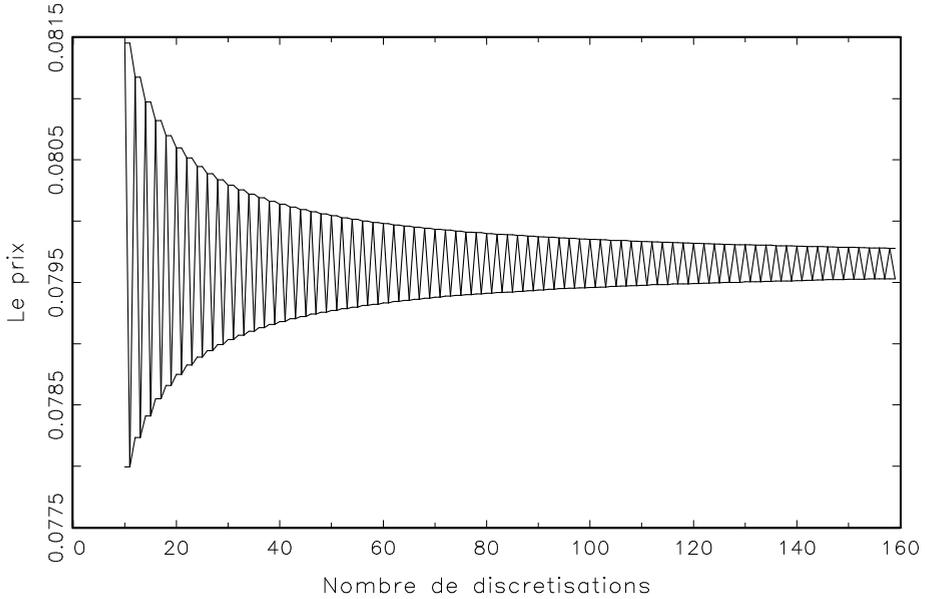
Si le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est un peu pauvre du point de vue de la théorie de la finance, il ne l'est pas du point de vue du calcul numérique effectif des prix d'options, et notamment des prix d'options américaines, pour lesquelles il n'existe pas de formules fermées. Dans les années 90, tous les traders avaient leur "arbre binomial" sur leur ordinateur pour calculer les prix d'options. Depuis les moyens de calcul ont beaucoup évolué, et des méthodes plus robustes ont été développées pour le modèle continu, en liaison avec les équations aux dérivées partielles, dont les schémas de discrétisation peuvent aisément s'interpréter comme associés à un arbre **trinomial**. La boucle est presque refermée.....Mais l'intérêt de l'arbre binomial comme méthode numérique reste toujours d'actualité comme le montre les références ci-dessous.

7.5.1 Un phénomène d'oscillation étrange

Comme on le voit sur le graphique ci-dessous, le prix du *Call* présente d'étranges oscillations. Ce fait bien connu des praticiens a été expliqué ces dernières années par Francine et Marc Diener dans [44]. Suivant une présentation de F. Diener, nous nous proposons de développer l'intuition mathématique du phénomène.

GAUSS Thu Sep 09 17:15:53 2004

Prix d'une option Call avec la formule approximative



DÉVELOPPEMENTS D'EDGEWORTH

L'idée est de partir du comportement asymptotique de la somme de v.a. i.i.d. (Y_j) , de moyenne 0, de variance σ^2 et ayant des moments d'ordre $r \geq 2$. Soit

$$F_n(x) := P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_j \leq x\right) \tag{7.32}$$

la fonction de répartition de la somme renormalisée. Alors, sous une petite hypothèse supplémentaire, la fonction $F_n(x)$ admet un développement asymptotique en puissance de $n^{-\frac{1}{2}}$ jusqu'à l'ordre $r - 2$, appelé développement d'Edgeworth de la forme

$$F_n(x) = \mathcal{N}(x) + g(x) \sum_{i=1}^{r-2} \frac{R_i(x)}{\sqrt{n}^i} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{r-1}}\right) \tag{7.33}$$

avec $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$. Les $R_i(x)$ sont des fonctions polynômes qu'on peut calculer explicitement.

LE MODÈLE BINOMIAL TRIANGULAIRE

Les v.a. indépendantes que nous étudions sont des familles triangulaires de v.a. de Bernoulli i.i.d. $(Y_j^{(n)})$ et les probabilités asymptotiques sont de la forme

$$q^{(n)} = q_0 + \frac{q_1}{\sqrt{n}} + \frac{q_2}{n} + \dots + \frac{q_{i_0}}{(\sqrt{n})^{i_0}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{i_0}}\right)$$

Nous avons montré dans la proposition 7.4.1 que la suite

$$U_n = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j^{(n)} - nq_n}{\sqrt{nq_n(1-q_n)}}$$

converge en loi vers une loi gaussienne centrée réduite ; en particulier, la fonction de répartition de U_n , $F_n(x)$, converge vers $\mathcal{N}(x)$. Cette fonction de répartition est une somme binomiale incomplète

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{k(n,x)} C_n^j (q^{(n)})^j (1-q^{(n)})^{n-j}$$

avec $h^{(n)}(x) = nq^{(n)} + x\sigma^{(n)}\sqrt{n}$ et $k(n,x) = [h^{(n)}(x)]$. C'est la présence de la fonction discontinue "partie entière" qui est la source du problème.

UNE FORMULE MAGIQUE

La représentation de la fonction de répartition de la loi binomiale à l'aide de la loi beta est un élément clé dans l'étude des approximations. La formule se montre par récurrence, mais c'est un bon exercice de chercher une preuve probabiliste en utilisant la loi du k^e nombre dans la suite de n v.a. uniformes indépendantes sur $[0, 1]$.

$$\sum_{j=0}^k C_n^j q^j (1-q)^{n-j} = (n-k)C_n^k \int_q^1 v^k (1-v)^{(n-k-1)} dv.$$

LA DÉFAUT DE CONTINUITÉ

Posons $\kappa(n,x) = h^{(n)}(x) - k(n,x)$. Cette fonction discontinue n'a pas de limite, mais reste bornée. L'erreur $F_n(x) - \mathcal{N}(x)$ fluctue exactement comme $\kappa(n,x)$ avec un amortissement en $n^{-\frac{1}{2}}$.

LE DÉVELOPPEMENT D'EDGEWORTH TRIANGULAIRE BINOMIAL

$$F_n(x) = \mathcal{N}(x) + \sum_{i=1}^{r-2} \frac{\phi_i(n,x)}{\sqrt{n}^i} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{r-1}}\right), \quad (7.34)$$

où grâce à Maple la fonction est donnée par

$$\phi_2(x, \kappa) = \frac{g(x)}{6\sigma_0} \left((2p_0 - 1)(x^2 - 1) + 3(1 - 2\kappa) \right)$$

La formule de $\phi_2(x, \kappa)$ est un peu longue et peut être trouvée dans [44]. L'erreur $F_n(x) - \mathcal{N}(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\phi_1(n,x)$ n'oscille plus que d'un côté et est plus petite.

◇

Troisième partie

Appendice

Chapitre 8

Probabilités et théorie de l'intégration

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux résultats de la théorie de l'intégration, en général avec des démonstrations. Bien que cette théorie ait un vocabulaire propre, nous emploierons plutôt celui de la théorie des probabilités. Ce chapitre est en partie construit sur les cours de Neveu [10] et Comets, El Karoui et Neveu [4]. Pour plus de détails, on pourra consulter Comets [3] pour une introduction aux probabilités et Bony [1] pour une présentation plus abstraite de la théorie de la mesure. Citons aussi le très bon livre de Barbe et Ledoux [12] dont nous nous sommes servi à plusieurs reprises.

8.1 Tribus, variables aléatoires et lois de probabilité.

8.1.1 Tribus

Soit Ω un ensemble, appelé *espace fondamental*, qu'il faut comprendre comme l'ensemble des résultats possibles, $\{\omega \in \Omega\}$, d'une expérience aléatoire. L'objet du calcul des probabilités est de quantifier (mesurer) l'occurrence de certaines parties de Ω appelées *événements*. La conjonction et la disjonction d'événements ainsi que la

négation d'un événement sont encore des événements. Plus précisément, l'ensemble des événements constitue une *tribu*.

Définition 8.1.1 Une *tribu* (ou σ -algèbre) \mathcal{A} sur Ω est une classe de parties de Ω contenant \emptyset , stable par complémentation et réunion dénombrable. Ces conditions s'écrivent

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- $\bigcup_I A_i \in \mathcal{A}$ si $A_i \in \mathcal{A}$ ($i \in I$) pour toute famille I dénombrable.

Le couple (Ω, \mathcal{A}) est appelé un **espace mesurable**.

Remarque 8.1.2 Une tribu est stable par intersection dénombrable.

Exemple 8.1.3 $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus. La première est la plus grossière et présente assez peu d'intérêt pour le probabiliste. La seconde est la plus riche et c'est celle dont on muni par défaut les ensembles dénombrables. Si Ω est non dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est en général trop riche pour qu'il soit possible d'en "mesurer" tous les ensembles. C'est ainsi qu'il existe des sous-ensembles de $[0, 1]$ dont on ne peut pas définir la mesure de Lebesgue (voir Bony [1, Chapitre 1, paragraphe 1.4.8]).

8.1.2 Tribu engendrée

En fait, les tribus importantes sont obtenues par le procédé (peu explicite) suivant. Pour toute classe \mathcal{C} de parties de Ω , il existe une plus petite tribu sur Ω qui la contienne ; on la note $\sigma(\mathcal{C})$, et on l'appelle la *tribu engendrée* par la classe \mathcal{C} . Considérons en effet toutes les tribus sur Ω qui contiennent \mathcal{C} (il en existe une, puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu), puis formons l'intersection de ces tribus. Il est facile de voir que cette intersection est elle-même une tribu, et que c'est la plus petite contenant \mathcal{C} .

Exemple 8.1.4 (Tribu borélienne). Si M est un espace topologique (tel que \mathbb{R}^d), la tribu borélienne sur M , notée $\mathcal{B}(M)$, est la tribu engendrée par la classe des ouverts. Elle est aussi engendrée par la classe des fermés puisqu'une tribu est stable par complémentation.

Proposition 8.1.5 *La tribu borélienne sur \mathbb{R} coïncide avec la tribu engendrée par les intervalles (a, b) , $-\infty < a < b < \infty$ où (et) désignent l'un des symboles] ou [. Elle coïncide aussi avec la tribu engendrée par les intervalles $] - \infty, a)$.*

DÉMONSTRATION :

Tout ouvert de \mathbb{R} s'écrivant comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts. Les autres propriétés s'en déduisent aisément. Par exemple, la relation $]a, b[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a, b + 1/n[$ prouve que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]a, b]$.

Exemple 8.1.6 (Tribu produit). Si Ω_1 et Ω_2 sont des ensembles munis respectivement des tribus \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , la tribu produit sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ est la tribu engendrée par les pavés $A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Exemple 8.1.7 (Tribu produit, cas dénombrable). La définition précédente se généralise au cas d'un produit infini dénombrable de la façon suivante. Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurables où I est un ensemble dénombrable, et soit $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$. Pour tout $J \subset I$ sous-ensemble fini de I et pour toute famille $\{A_i\}_{i \in J}$ telle que $A_i \in \mathcal{A}_i$ le cylindre $C((A_i)_{i \in J})$ est l'ensemble des $\underline{x} = (x_i)_{i \in I} \in \Omega$ tels que $x_i \in A_i$ pour tout $i \in J$. La tribu produit sur Ω est la tribu engendrée par les cylindres.

8.1.3 Variables aléatoires et applications mesurables

Pour toute application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, l'application d'ensembles $f^{-1} : \mathcal{P}(\Omega') \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ définie par

$$f^{-1}(A') = \{\omega : \omega \in \Omega, f(\omega) \in A'\}$$

commute avec les opérations usuelles d'ensembles (dénombrables ou non) :

- $f^{-1}(\bigcap_I A'_i) = \bigcap_I f^{-1}(A'_i)$;
- $f^{-1}(\bigcup_I A'_i) = \bigcup_I f^{-1}(A'_i)$;
- $f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c$;

et de plus évidemment $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\Omega') = \Omega$. Il s'ensuit immédiatement que

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

est une tribu sur Ω si \mathcal{A}' est une tribu sur Ω' . Dans ce cas, on appelle $f^{-1}(\mathcal{A}')$ la tribu engendrée par f que l'on note aussi $\sigma(f)$.

Définition 8.1.8 *Étant donnés deux espaces mesurables (Ω, \mathcal{A}) et (Ω', \mathcal{A}') , une application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est appelée une **application mesurable** ou encore une **variable aléatoire** (en abrégé v.a.) si $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$, donc si $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ pour tout $A' \in \mathcal{A}'$.*

Lorsque les espaces Ω et Ω' sont des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, une application mesurable est plutôt dite *borélienne*.

Exemple 8.1.9 La fonction indicatrice d'un événement A , $\mathbf{1}_A$, qui vaut 1 sur A et 0 sur A^c est une v.a.

La proposition suivante simplifie considérablement la plupart des vérifications de mesurabilité.

Proposition 8.1.10 *Pour qu'une application $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ soit mesurable, il suffit déjà que*

$$f^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{A}$$

pour une classe \mathcal{C}' de parties de Ω' engendrant \mathcal{A}' ($\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{A}'$).

En particulier pour qu'une application f d'un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) dans un espace topologique Ω' muni de sa tribu borélienne soit elle-même mesurable, il suffit que $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert D de Ω' . Si $\Omega' = \mathbb{R}^d$, on peut se limiter à considérer des pavés.

DÉMONSTRATION :

Cette proposition résulte de ce que les opérations f^{-1} et σ sur les classes de parties commutent entre elles : pour toute application $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ et toute classe \mathcal{C}' de parties de Ω' , on a

$$f^{-1}[\sigma(\mathcal{C}')] = \sigma[f^{-1}(\mathcal{C}')]. \quad (8.1)$$

En effet, la classe $f^{-1}[\sigma(\mathcal{C}')]$ est une tribu d'après ce qui précède et elle contient $f^{-1}(\mathcal{C}')$; elle contient donc aussi $\sigma[f^{-1}(\mathcal{C}')]$. Inversement la formule

$$\{A' : A' \in \mathcal{P}(\Omega'), f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

définit pour toute tribu \mathcal{A} sur Ω une classe de parties de Ω' qui est une tribu par les propriétés de f^{-1} (cette tribu est dite induite par f à partir de \mathcal{A}); pour $\mathcal{A} = \sigma[f^{-1}(\mathcal{C}')]$, cette tribu induite contient évidemment la classe \mathcal{C}' et donc la tribu $\sigma(\mathcal{C}')$.

Ainsi $f^{-1}(\sigma(C')) \subset \sigma[f^{-1}(C')]$ et l'égalité (8.1) est prouvée.

La proposition en résulte puisque l'hypothèse entraîne que

$$f^{-1}(A') = f^{-1}(\sigma(C')) = \sigma(f^{-1}(C')) \subset \sigma(A) = A.$$

Remarques 8.1.11 (a) Si E est un espace dénombrable (tel que \mathbb{Z}^d) muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$ de toutes ses parties, la classe des singletons $\{x\}$ ($x \in E$) engendre \mathcal{F} et pour qu'une application $X : \Omega \rightarrow E$ soit une v.a. il faut évidemment et il suffit déjà que

$$\{X = x\} \equiv X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$$

pour tout $x \in E$.

(b) Semblablement, pour toute fonction réelle $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) , les quatre conditions suivantes sont équivalentes (proposition 8.1.5) :

- 1) X est une v.a. ;
- 2) $X^{-1}((a, b)) = \{X \in (a, b)\} \in \mathcal{A}$ pour tous réels $a < b$, où (et) désignent l'un des symboles [ou] ;
- 3) $X^{-1}(]-\infty, a)) = \{X \in]-\infty, a)\} \in \mathcal{A}$ pour tout réel a ;
- 4) $\{X \in F\} \in \mathcal{A}$ pour tout borélien F de \mathbb{R} .

(c) Toute fonction continue f de \mathbb{R}^d dans $\mathbb{R}^{d'}$ (ou plus généralement d'un espace topologique dans un autre) est borélienne (c'est-à-dire mesurable pour les tribus boréliennes de \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^{d'}$) car l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, donc un borélien.

Une conséquence de la remarque (c) ci-dessus est la proposition suivante.

Proposition 8.1.12 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION :

La tribu borélienne sur \mathbb{R}^d est engendrée par les pavés ouverts (*i.e.* les produits de d intervalles ouverts de \mathbb{R}), puisque chaque ouvert de \mathbb{R}^d est réunion dénombrable de pavés ouverts. Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, soit $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la projection définie par $\pi_i(x_1, \dots, x_d) = x_i$. L'application π_i étant continue, elle est mesurable par rapport aux tribus boréliennes. Ainsi, pour tous boréliens $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, d$,

$$A_1 \times \dots \times A_d = \bigcap_i \pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

D'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Stabilité des variables aléatoires

Nous montrons ici que la mesurabilité est préservée par les opérations algébriques usuelles ainsi que par passage à la limite.

Proposition 8.1.13 a) Si $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ et $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ sont deux applications mesurables, il en est de même de l'application composée $g \circ f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$.

b) Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur aléatoire réel d -dimensionnel ($d \geq 1$) et si $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction borélienne, alors

$$Y = \varphi \circ X$$

est un vecteur aléatoire réel.

En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $X = (X_1, \dots, X_d)$ soit un vecteur aléatoire est que les applications coordonnées soient des v.a.

c) L'espace des v.a. réelles (v.a.r.) définies sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) est stable par les opérations algébriques usuelles : si X, Y sont des v.a.r. et si $c \in \mathbb{R}$,

$$cX, X + Y, XY, \max(X, Y), \min(X, Y)$$

sont aussi des v.a.r. Cela reste exact pour des v.a. à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ à condition de remplacer les expressions indéterminées $\infty - \infty, 0 \times \infty$ par 0.

DÉMONSTRATION :

a) La propriété d'associativité découle immédiatement des définitions puisque $(g \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A''))$, pour toute partie A'' de Ω'' .

b) La mesurabilité de $Y = \varphi \circ X$ résulte de la propriété d'associativité de la mesurabilité.

Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur aléatoire, $X_i = \pi_i \circ X$ est une v.a. d'après ce qui précède. Réciproquement, si X_1, \dots, X_d sont des v.a.

$$X^{-1}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d) = \bigcap_{i=1}^d X_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$$

pour tous boréliens A_1, \dots, A_d . Ce qui prouve que X est mesurable d'après la proposition 8.1.10.

c) i) Les quatre fonctions $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi(x, y) = x + y$, resp. xy , resp. $\max(x, y)$, resp. $\min(x, y)$ sont continues et donc boréliennes (d'après la remarque

8.1.11 (c) . De plus, le couple (X, Y) est une application mesurable de Ω dans \mathbb{R}^2 et par composition $\varphi(X, Y)$ est une v.a. réelle grâce à l'associativité de la mesurabilité. On montre de même que cX est une v.a.r. lorsque X en est une, en considérant la fonction continue d'une variable $\varphi(x) = cx$.

c) ii) Pour vérifier qu'une application $X : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est mesurable pour la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$, il ne suffit plus comme dans le cas de \mathbb{R} de vérifier que $\{a < X < b\} \in \mathcal{A}$ pour tous les réels $a < b$; il faut en outre vérifier que $\{X = +\infty\}, \{X = -\infty\} \in \mathcal{A}$. Si X et $Y : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$ sont deux v.a.r. (au sens large), pour montrer que la somme $X + Y$ convenablement définie est encore une v.a.r. (au sens large), associons leur les v.a.r. $X', Y' : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} X' &= X \quad \text{sur} \quad \{X = \pm\infty\}^c, \quad = 0 \quad \text{sur} \quad \{X = \pm\infty\} \\ Y' &= Y \quad \text{sur} \quad \{Y = \pm\infty\}^c, \quad = 0 \quad \text{sur} \quad \{Y = \pm\infty\}; \end{aligned}$$

la somme $X' + Y'$ est bien définie sur tout Ω et

$$\begin{aligned} X + Y &= X' + Y' \quad \text{sur} \quad \{X = \pm\infty \text{ ou } Y = \pm\infty\}^c \\ &= +\infty, \text{ resp. } -\infty \quad \text{sur} \quad \{X = Y = +\infty\}, \quad \text{resp.} \quad \{X = Y = -\infty\} \\ &= 0 \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre alors que X' et Y' sont mesurables puis, comme $X' + Y'$ est alors mesurable d'après ce qui précède, que $X + Y$ est mesurable.

Lemme 8.1.14 *Pour toute famille dénombrable de v.a. $X_i : \Omega \rightarrow (E, \mathcal{F})$ ($i \in I$) et toute partition $(A_i, i \in I)$ de Ω dans \mathcal{A} indexée par les mêmes indices $i \in I$, la formule de recollement*

$$X = X_i \quad \text{sur} \quad A_i \quad (i \in I)$$

définit une nouvelle v.a. $X : \Omega \rightarrow (E, \mathcal{F})$.

Ce lemme résulte immédiatement de ce que pour tout $F \in \mathcal{F}$,

$$\{X \in F\} = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap \{X_i \in F\}).$$

Les deux propositions suivantes montrent que la classe des v.a. est stable par passage à la limite.

Proposition 8.1.15 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires d'un espace mesuré (Ω, \mathcal{A}) dans un espace métrique E muni de sa tribu borélienne. Si pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))$ converge vers $X(\omega) \in E$, alors X est une variable aléatoire.*

DÉMONSTRATION :

D'après la proposition 8.1.10, il suffit de montrer que $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert U de E . Soit $U_p = \{x \in E : d(x, E \setminus U) > 1/p\}$ pour $p \geq 1$. Alors U_p est un ouvert, donc un borélien, et

$$X^{-1}(U) = \bigcup_p \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} X_n^{-1}(U_p)$$

est dans \mathcal{A} .

Dans le cas de variables réelles, il est possible de préciser ce dernier résultat comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 8.1.16 a) Pour toute suite (X_n) de v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\sup_n X_n \quad , \quad \inf_n X_n$$

sont encore des v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$; donc pour une suite croissante resp. décroissante de v.a. réelles, $\lim_n \uparrow X_n$ resp. $\lim_n \downarrow X_n$ est encore une v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Soit (X_n) une suite de v.a. réelles et soient

$$\{X_n \rightarrow\}_{\mathbb{R}} = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$$

et

$$\{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

les ensembles de convergence dans \mathbb{R} et $\overline{\mathbb{R}}$ de (X_n) . Alors $\{X_n \rightarrow\}_{\mathbb{R}}$ (resp. $\{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}$) est un événement et la formule

$$X = \lim_n X_n \quad \text{sur} \quad \{X_n \rightarrow\}_{\mathbb{R}} \quad (\text{resp.} \{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}), \quad = 0 \quad \text{ailleurs}$$

définit une v.a. réelle X .

c) Toute v.a. réelle positive est limite croissante d'une suite de v.a. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

DÉMONSTRATION :

a) La mesurabilité de $\sup_n X_n$ résulte de la formule

$$\left\{ \sup_n X_n \leq b \right\} = \bigcap_n \{X_n \leq b\},$$

valable pour tout $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et de la propriété des intervalles fermés $[-\infty, b]$ d'engendrer la tribu borélienne. Le cas des bornes inférieures se ramène à celui des bornes supérieures par la transformation « changement de signe » : $X \rightarrow -X$.

b) i) Associons à toute suite (X_n) de v.a.r. leurs limites supérieure et inférieure définies en chaque point de Ω par

$$\begin{aligned} (\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n)(\omega) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \lim_{p \uparrow \infty} \downarrow \sup_{n \geq p} X_n(\omega), \\ (\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n)(\omega) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \lim_{p \uparrow \infty} \uparrow \inf_{n \geq p} X_n(\omega). \end{aligned}$$

Une double application de (a) montre que ce sont des v.a. réelles (au sens large). Comme

$$\begin{aligned} \{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}} &= \{\liminf_n X_n = \limsup_n X_n\} \\ &= \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} \{\liminf_n X_n < r < \limsup_n X_n\}^c \end{aligned}$$

puisque deux nombres de $\overline{\mathbb{R}}$ sont égaux s'ils ne sont séparés par aucun rationnel, nous voyons que $\{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}$ est un événement et alors

$$X = \limsup_n X_n \quad \text{sur} \quad \{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}, = 0 \quad \text{ailleurs}$$

est une v.a. d'après le lemme 8.1.14 ci-dessus.

b) ii) Dans le raisonnement précédent, nous avons inclus dans $\{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}$ les ω par lesquels la suite $(X_n(\omega), n \geq 1)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; si au contraire nous voulions les exclure, il suffirait de remplacer à la fin $\{X_n \rightarrow\}_{\overline{\mathbb{R}}}$ par son intersection avec $\{-\infty < X < +\infty\}$ et ensuite X par $X \mathbf{1}_{\{-\infty < X < +\infty\}}$.

c) Il suffit de considérer la suite

$$X_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbf{1}_{\{X(\omega) > n\}}.$$

8.1.4 Mesures, probabilités et lois

Rappelons pour commencer la définition d'une probabilité, et plus généralement d'une mesure.

Définition 8.1.17 Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une **mesure** sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que

- (a) $m(\emptyset) = 0$;
- (b) m est σ -additive, c'est-à-dire

$$m \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(A_i)$$

pour toute famille dénombrable $(A_i, i \in \mathbb{N})$ d'événements deux à deux disjoints.

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, m) s'appelle un **espace mesuré**.

Lorsque la mesure de l'espace est finie, la mesure est dite finie. Lorsqu'elle est finie sur une suite croissante d'ensembles de réunion l'espace, elle est dite σ -finie.

Une **probabilité** sur (Ω, \mathcal{A}) est une mesure P telle que

$$P(\Omega) = 1.$$

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) s'appelle alors un **espace de probabilité** (ou espace probabilisé).

La proposition suivante présente quelques propriétés basiques des mesures : la monotonie (propriété (i)), la sous-additivité (ii) et la continuité ((iii) et (iv)).

Proposition 8.1.18 Soit (Ω, \mathcal{A}, m) un espace mesuré et $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Alors

(i) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow m(A_1) \leq m(A_2)$.

(ii) $m(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i m(A_i)$.

(iii) Si $A_i \subset A_{i+1}$ pour tout i , alors $(m(A_i))_i$ converge en croissant vers $m(\bigcup_i A_i)$.

(iv) Si $A_{i+1} \subset A_i$ pour tout i , et $m(A_{i_0}) < \infty$ pour un certain i_0 alors $(m(A_i))_i$ converge en décroissant vers $m(\bigcap_i A_i)$.

DÉMONSTRATION :

(i) se déduit de la σ -additivité en remarquant que $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$.

(ii) Si I est fini (ii) se démontre par récurrence à partir de

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1) \leq m(A_1) + m(A_2).$$

Si I est infini, on peut supposer $I = \mathbb{N}$ et comme

$$m\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) \leq \sum_{i=0}^n m(A_i) \leq \sum_i m(A_i)$$

le résultat se déduit de (iii).

(iii) On suppose $I = \mathbb{N}$. Soit $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ pour $i \geq 1$ et $B_0 = A_0$. Alors $\bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$ et le résultat se déduit de la σ -additivité.

(iv) Supposons, sans perte de généralité, $I = \mathbb{N}$ et $i_0 = 0$. La suite $(B_i = A_0 \setminus A_i)$ est croissante et comme $m(B_i) \leq m(A_0)$ la suite $(m(B_i))$ est croissante et bornée, donc convergente. Ainsi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m(A_0) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i) = m(A_0) - m\left(\bigcup_i B_i\right) \quad (\text{d'après (iii)})$$

$$= m(A_0) - m\left(A_0 \setminus \bigcap_i A_i\right) = m\left(\bigcap_i A_i\right).$$

Terminons cette section avec le lemme très utile de Borel-Cantelli.

Théorème 8.1.19 (Lemme de Borel-Cantelli). *Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et $\{A_n\}$ une famille d'événements.*

(i) Si

$$\sum_n P(A_n) < \infty$$

alors l'événement

$$\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\} = \bigcap_m \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right)$$

est de probabilité nulle.

(ii) Si la famille $\{A_n\}$ est indépendante, la réciproque est vraie. Plus précisément, si

$$\sum_n P(A_n) = \infty,$$

alors

$$P\{\omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\} = 1.$$

DÉMONSTRATION :

(i) Soit $A = \bigcap_m \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right)$. Alors

$$P(A) \leq P\left(\bigcup_{n \geq m} A_n\right) \leq \sum_{n \geq m} P(A_n).$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand m tend vers l'infini. D'où le résultat.

(ii) Pour tout N

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{N \geq n \geq m} A_n\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{N \geq n \geq m} A_n^c\right) = 1 - \prod_{N \geq n \geq m} (1 - P(A_n)) \\ &\geq 1 - \exp\left(-\sum_{N \geq n \geq m} P(A_n)\right) \end{aligned}$$

car $1 - x \leq e^{-x}$ pour $x \geq 0$. D'où, en passant à la limite $N \rightarrow \infty$,

$$P\left(\bigcup_{n \geq m} A_n\right) = 1 \text{ et donc } P\left(\bigcap_m \left(\bigcup_{n \geq m} A_n\right)\right) = 1.$$

Loi et mesure image

Les v.a. permettent de “transporter” les mesures d’un espace vers un autre grâce à la technique suivante, dite de “mesure image”.

Définition 8.1.20 Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application mesurable de l'espace mesuré (Ω, \mathcal{A}, m) dans l'espace mesurable (Ω', \mathcal{A}') . L'application $m_f : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty]$ définie par

$$m_f(A') = m[f^{-1}(A')] \quad (A' \in \mathcal{A}'),$$

est une mesure sur (Ω', \mathcal{A}') appelée **l'image de m par f** .

Exemple 8.1.21 Si $m = P$ est une probabilité et $f = X$ une v.a., l'image de P par X est aussi une probabilité. Conformément à l'usage chez les probabilistes, on l'appelle **la loi de X** et on note

$$P(X \in A) = P(\{X \in A\}) = P_X(A).$$

Unicité et existence des probabilités

À l'exception du cas particulier où la tribu \mathcal{A} sur Ω est finie (par exemple si Ω est fini) il est impossible, en général, de caractériser une probabilité (ou une mesure) par la donnée de sa valeur en **tout** élément de \mathcal{A} . Les deux théorèmes suivants montrent qu'il suffit de se donner cette valeur en tout élément d'une classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ suffisamment riche, pour définir de façon unique une probabilité. Dans la pratique (du probabiliste), la question de l'existence se pose peu et c'est surtout le théorème d'unicité qui joue un rôle fondamental.

Théorème 8.1.22 (Théorème d'unicité). Deux probabilités P_1 et P_2 qui coïncident sur une classe \mathcal{C} stable par intersection coïncident sur la tribu engendrée par \mathcal{C} . En d'autres termes, si \mathcal{C} est stable par intersection

$$P_1(C) = P_2(C) \quad \forall C \in \mathcal{C} \Rightarrow P_1(A) = P_2(A) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{C}). \quad (8.2)$$

Le même résultat vaut pour des mesures finies.

DÉMONSTRATION :

La démonstration de ce théorème n'est pas très intuitive. Elle repose sur l'étude de la

classe \mathcal{A} des A tels que $P_1(A) = P_2(A)$.

Clairement, \mathcal{A} est stable par limite croissante ($A_i \in \mathcal{A}$ et $A_i \subset A_{i+1} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{A}$), par différence ($A \subset B, A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B - A \in \mathcal{A}$), mais n'est pas stable par intersection. Ce n'est donc pas une tribu a priori, mais seulement ce qu'on appellera un d -système. Nous noterons $d(\mathcal{C})$ le d -système engendré par \mathcal{C} (i.e. l'intersection de tous les d -systèmes contenant \mathcal{C}).

Pour utiliser l'hypothèse que \mathcal{C} est stable par intersection, nous nous intéressons à la classe

$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A}; \forall C \in \mathcal{C} \quad A \cap C \in d(\mathcal{C})\}$$

Puisque \mathcal{C} est stable par intersection, \mathcal{A}_1 est un d -système qui contient \mathcal{C} , donc $d(\mathcal{C})$. Par suite $d(\mathcal{C})$ est un d -système stable par l'intersection avec les éléments de \mathcal{C} . De même introduisons la classe

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A}; \forall A_1 \in d(\mathcal{C}), \quad A \cap A_1 \in d(\mathcal{C})\}.$$

La classe \mathcal{A}_2 est un d -système qui contient \mathcal{C} , donc $d(\mathcal{C})$, et qui est donc stable par intersection. C'est la propriété qui manquait pour montrer que c'est une tribu.

Exemple 8.1.23 Deux probabilités sur \mathbb{R} qui donnent la même valeur aux intervalles $] - \infty, x]$ sont identiques. La même propriété est vraie sur \mathbb{R}^d avec les pavés.

S'agissant de l'existence, nous admettrons sans démonstration le théorème suivant. On pourra consulter Bony [1, Chapitre 1] pour une preuve.

Théorème 8.1.24 (Théorème de prolongement de Carathéodory). Soit \mathcal{C} une classe de parties de Ω stable par complémentation, réunion finie et contenant l'ensemble vide (une telle classe s'appelle une algèbre de Boole). Soit $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ une fonction telle que

- (a) $m(\emptyset) = 0$ et
- (b) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pour $A, B \in \mathcal{C}$ et $A \cap B = \emptyset$;
- (c) si $m(\Omega) = \infty$, on suppose de plus qu'il existe une suite croissante (A_p) d'éléments de \mathcal{C} telle que $\Omega = \bigcup_p A_p$, $m(A_p) < \infty$ et $m(A \cap A_p) \rightarrow \infty$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ vérifiant $m(A) = \infty$.

Alors il existe une unique mesure sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$ qui coïncide avec m sur \mathcal{C} .

Exemple 8.1.25 (Mesure de Lebesgue). Soit \mathcal{C} l'algèbre de Boole constituée des réunions finies d'intervalles de \mathbb{R} . Chaque élément A de \mathcal{C} peut s'écrire comme réunion finie d'intervalles disjoints et on définit $\lambda(A)$ comme la somme des longueurs de ces intervalles. La fonction $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ainsi définie vérifie les hypothèses du théorème 8.1.24. Son extension à $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la *mesure de Lebesgue*.

Exemple 8.1.26 (Mesure produit). Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, m_i)$, $i = 1, 2$ deux espaces mesurés σ -finis. On pose $m_1 \otimes m_2(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$ pour tout $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$. Cette définition s'étend par additivité à l'algèbre de Boole sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, \mathcal{C} , constituée des réunions finies de pavés, puis par le théorème 8.1.24, à $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. La mesure $m_1 \otimes m_2$ ainsi construite sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ s'appelle la *mesure produit* des mesures m_1 et m_2 .

8.2 Intégrales et espérances

Le point de départ de la construction de l'intégrale est l'espérance des v.a. discrètes. L'intégrale est vue comme un opérateur E linéaire et continu, c'est-à-dire que moyennant quelques hypothèses qui seront précisées ultérieurement

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2), \quad E(\lim_n X_n) = \lim_n E(X_n).$$

8.2.1 Intégrale des fonctions positives

Nous introduisons pour commencer l'intégrale des fonctions positives qui est particulièrement simple.

Théorème 8.2.1 (Intégrale des fonctions mesurables positives). *Soit m une mesure sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) . Toute fonction mesurable réelle positive $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ possède alors une intégrale*

$$0 \leq \int f \, dm \leq \infty$$

notée encore $\int_{\Omega} f(\omega) m(d\omega)$ ou $m(f)$; et jouissant des propriétés suivantes :

a) $\int \mathbf{1}_A dm = m(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$;

- b) $\int cf \, dm = c \int f \, dm, \quad \forall c \in \mathbb{R}_+;$
 c) $\int (f + g) \, dm = \int f \, dm + \int g \, dm, \quad \forall f, g \geq 0;$
 d) (positivité et monotonie) $0 \leq \int f \, dm \leq \int g \, dm$ si $0 \leq f \leq g;$
 e) (convergence monotone) pour toute suite croissante positive (f_n) de limite f ,

$$\int f \, dm = \lim_n \uparrow \int f_n \, dm. \quad (8.3)$$

Si $m = P$ est une probabilité, $\int f \, dP$ est notée $E(f)$ et s'appelle l'espérance de f .

DÉMONSTRATION :

a) On procède en deux étapes en considérant d'abord l'ensemble Γ des fonctions mesurables positives $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ dont l'ensemble $g(\Omega)$ des valeurs possibles est fini. Une telle fonction s'écrit

$$g = \sum_{x \in g(\Omega)} x \mathbf{1}_{\{g=x\}} \quad (8.4)$$

où $\{g = x\} = g^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Ceci incite à poser

$$\int g \, dm := \sum_{g(\Omega)} x m(\{g = x\})$$

avec la convention $0 \cdot \infty = 0$. Pour f mesurable positive, on pose alors

$$\int f \, dm := \sup \left\{ \int g \, dm : g \in \Gamma \text{ et } g \leq f \right\}.$$

Les propriétés a), b), c), d) de l'intégrale se déduisent facilement de ces définitions. Il suffit d'abord de les vérifier pour les éléments de Γ puis de passer au supremum.

Il reste à établir (e). Puisque (f_n) est croissante $(\int f_n \, dm)$ est croissante (d'après (d)) et donc ; la limite $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm$ existe dans $[0, \infty]$ et vérifie $r \leq \int f \, dm$. Afin de prouver l'inégalité réciproque, fixons $0 \leq c < 1$ et $g \in \Gamma$ tel que $g \leq f$. Alors, toujours d'après (d),

$$\int f_n \, dm \geq \int \mathbf{1}_{\{f_n \geq cg\}} f_n \, dm \geq c \int \mathbf{1}_{\{f_n \geq cg\}} g \, dm.$$

L'écriture de g sous la forme (8.4) montre qu'alors

$$\int \mathbf{1}_{\{f_n \geq cg\}} g \, dm = \sum_{x \in g(\Omega)} m(\{g = x\} \cap \{f_n \geq cx\})x.$$

Par application du (iii) de la proposition 8.1.18, cette quantité converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers

$$\sum_{x \in g(\Omega)} m(\{g = x\} \cap \{f \geq cx\})x = \sum_{x \in g(\Omega)} m(\{g = x\})x = \int g \, dm.$$

Ainsi

$$r \geq c \int g \, dm.$$

D'où l'on déduit que $r \geq \int f \, dm$ puisque c est arbitraire dans $[0, 1[$ et $g \leq f$ est arbitraire dans Γ .

Mesures à densité

Considérons sur un espace (Ω, \mathcal{A}) (par exemple \mathbb{R}^d) une mesure de référence m (par exemple la mesure de Lebesgue). Nous dirons qu'une mesure μ admet une densité mesurable g par rapport à m si

$$\mu(A) = \int_A g dm = \int \mathbf{1}_A(\omega) g(\omega) m(d\omega).$$

La fonction mesurable g est **nécessairement positive** sauf sur un ensemble de mesure m nulle. La mesure μ est alors notée $g \cdot m$. On utilise aussi la notation $d\mu = g dm$. Si $\mu = P$ est une probabilité, g est **d'intégrale 1**.

DÉMONSTRATION :

En effet, la fonction d'ensemble sur \mathcal{A} , $\int \mathbf{1}_A(\omega) g(\omega) m(d\omega)$ est σ -additive en A en vertu de la propriété de linéarité de l'intégrale sur les sommes de séries positives du théorème 8.2.1, e) et de la formule $\mathbf{1}_{\sum_i A_i} = \sum_i \mathbf{1}_{A_i}$ valable pour toute famille dénombrable d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints.

L'intégration par rapport à la mesure $g \cdot m$ se ramène naturellement à l'intégration par rapport à m : pour toute fonction réelle borélienne positive f

$$\int f d(g \cdot m) = \int f g dm.$$

DÉMONSTRATION :

L'égalité est évidente si $f \in \Gamma$ (i.e. f ne prend qu'un nombre fini de valeurs). Si f est seulement positive, f est limite croissante d'une suite d'éléments de Γ (proposition 8.1.16, (c)) et le résultat s'obtient par convergence monotone.

8.2.2 Intégrale des fonctions de signe quelconque

L'intégrale des fonctions réelles mesurables f de signe quelconque se déduit de celle des fonctions positives en utilisant la décomposition

$$f = f^+ - f^- \quad \text{où} \quad f^\pm = \max(\pm f, 0)$$

de f en parties positive ou négative. Mais l'expression $\int f^+ dm - \int f^- dm$ peut être indéterminée puisque nous avons permis à l'intégrale des fonctions positives de prendre éventuellement la valeur $+\infty$. En fait, pour une fonction f de signe quelconque, ce

n'est que lorsque les deux intégrales $\int f^\pm dm$ sont finies que l'intégrale de f est intéressante. Comme $|f| = f^+ + f^-$, les intégrales $\int f^\pm dm$ sont finies si et seulement si $\int |f| dm$ est finie.

Définition 8.2.2 Une fonction réelle mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **intégrable** si $\int |f| dm < \infty$ et son intégrale est alors définie par

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm.$$

Si $m = P$ est une probabilité, $\int f dP$ est notée $E(f)$ et s'appelle **l'espérance** de f .

Le théorème suivant regroupe quelques propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue. Si les propriétés (a) (linéarité) (b) (monotonie) et (c) sont communes avec l'intégrale de Riemann, la propriété (d) (convergence dominée) exprime toute la puissance de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 8.2.3 (Convergence dominée). L'espace $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(m)$ des fonctions intégrables et l'intégrale $\int \cdot dm$ définie sur \mathcal{L}^1 ont les propriétés suivantes :

(a) \mathcal{L}^1 est un espace vectoriel et $\int \cdot dm$ est linéaire

$$\sum_1^n c_i f_i \in \mathcal{L}^1 \quad \text{et} \quad \int \sum_1^n c_i f_i dm = \sum_1^n c_i \int f_i dm$$

pour tous $n \geq 1, c_i, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^1$;

(b) $\int f dm \geq 0$ si $f \in \mathcal{L}^1$ et si $f \geq 0$ sur Ω ; plus généralement

$$\int f dm \leq \int g dm \quad \text{si} \quad f \leq g \quad \text{et} \quad f, g \in \mathcal{L}^1 ;$$

(c) si $f \in \mathcal{L}^1$

$$\left| \int f dm \right| \leq \int |f| dm.$$

En particulier, pour que $f \in \mathcal{L}^1$, il suffit que f soit dominée (c'est-à-dire majorée en valeur absolue) par une fonction positive $g \in \mathcal{L}^1$;

(d) (**propriété de convergence dominée**) Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions réelles mesurables qui converge en chaque point de Ω vers une fonction f_∞ et

qui est dominée par une fonction intégrable indépendante de n (soit $|f_n| \leq g$ avec $g \in \mathcal{L}^1$). Alors

$$\int f_\infty \, dm = \lim_n \int f_n \, dm.$$

DÉMONSTRATION :

Les propriétés algébriques (a, b, c) de \mathcal{L}^1 et de l'intégrale se vérifient très facilement. Par exemple si f_1 et f_2 sont deux fonctions de \mathcal{L}^1 , les deux inégalités $(f_1 + f_2)^\pm \leq f_1^\pm + f_2^\pm$ entraînent bien que $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^1$; en outre, bien que ces inégalités ne soient pas des égalités en général, on a

$$f_1^+ + f_2^+ - (f_1 + f_2)^+ = f_1^- + f_2^- - (f_1 + f_2)^-$$

et cela entraîne que $\int (f_1 + f_2) dm = \int f_1 dm + \int f_2 dm$.

Par contre la propriété de convergence dominée, qui est l'une des raisons d'être de l'intégrale que nous construisons, est un peu plus délicate à établir et repose sur le lemme de Fatou suivant.

Lemme 8.2.4 *Pour toute suite $(f_n, n \geq 1)$ de fonctions mesurables positives*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm.$$

DÉMONSTRATION :

Cette inégalité s'obtient en écrivant que pour tout $k \geq 1$,

$$\int \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) dm \leq \inf_{n \geq k} \int f_n \, dm$$

puisque l'intégrale est croissante, puis en faisant tendre $k \rightarrow \infty$ et en utilisant la définition de la $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ ainsi que (8.3).

Soit alors $(f_n, n \geq 1)$ une suite convergente de fonctions mesurables, dominée par une fonction intégrable g . Les fonctions mesurables $g - f_n$ resp. $g + f_n$ sont alors positives et tendent vers $g - f_\infty$ resp. $g + f_\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'après le lemme de Fatou

$$\int (g \pm f_\infty) \, dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g \pm f_n) \, dm,$$

ce qui s'écrit encore, en éliminant $\int g \, dm$ qui est finie,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm \geq \int f_\infty \, dm, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm \leq \int f_\infty \, dm.$$

Ce qui suffit à conclure.

8.2.3 Continuité et dérivabilité sous le signe \int

Soit U un ouvert d'un espace métrique E , (Ω, \mathcal{A}, m) un espace mesuré et $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le théorème de convergence dominée 8.2.3 permet d'étudier la régularité (continuité, dérivabilité) de la fonction

$$F(x) = \int f(x, \omega) m(d\omega). \quad (8.5)$$

Théorème 8.2.5 (Continuité sous le signe \int). *On suppose que*

- (i) *pour tout $x \in U$, la fonction $\omega \rightarrow f(x, \omega)$ est mesurable ;*
- (ii) *pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \rightarrow f(x, \omega)$ est continue au point $x_0 \in U$;*
- (iii) *il existe $h \in \mathcal{L}^1(m)$ telle que pour tout x , $|f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ presque sûrement.*

Alors, la fonction F donnée par (8.5) est bien définie et est continue en x_0 .

DÉMONSTRATION :

L'hypothèse (iii) assure l'existence de F . Pour montrer que F est continue au point x_0 il suffit de montrer que $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ pour toute suite (x_n) d'éléments de U convergente vers x_0 . Soit (x_n) une telle suite. Alors, d'après (ii), $f(x_n, \omega) \rightarrow f(x_0, \omega)$ presque sûrement. D'après (iii) et le théorème de convergence dominée, $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$.

Théorème 8.2.6 (Dérivabilité sous le signe \int). *On suppose ici que U est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On suppose de plus que*

- (i) *pour tout $x \in U$, la fonction $\omega \rightarrow f(x, \omega)$ est intégrable ;*
- (ii) *pour presque tout $\omega \in \Omega$, et pour tout $x \in U$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)$ existe et vérifie*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| \leq h(\omega),$$

où $h \in \mathcal{L}^1(m)$.

Alors la fonction F définie par (8.5) est dérivable, et

$$F'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) m(d\omega).$$

DÉMONSTRATION :

Soit (x_n) une suite d'éléments de U convergeant vers $x \in U$. Alors $g_n(\omega) =$

$\frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x}$ converge p.s. vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)$ et, par application de l'inégalité des accroissements finis,

$$|g_n(\omega)| \leq \sup_{\{0 \leq \theta \leq 1\}} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\theta x + (1 - \theta)x_n, \omega) \right| \leq h(\omega).$$

Donc, par application du théorème de convergence dominée,

$$\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \int_{\Omega} g_n(\omega) dm(\omega) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) m(d\omega).$$

Corollaire 8.2.7 *On suppose ici que U est un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose de plus que*

- (i) *pour tout $x \in U$, la fonction $\omega \rightarrow f(x, \omega)$ est intégrable ;*
- (ii) *pour presque tout $\omega \in \Omega$, et pour tout $x \in U$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega)$ existent, sont continues (en x) et vérifient*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega) \right| \leq h(\omega),$$

où $h \in \mathcal{L}^1(m)$.

Alors la fonction F définie par (8.5) est de classe C^1 , et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega) m(d\omega)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

DÉMONSTRATION :

Une fonction de plusieurs variables est C^1 si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues. L'existence des dérivées partielles de F est une conséquence du théorème 8.2.6, et leur continuité se déduit du théorème 8.2.5 appliqué aux fonctions $x, \omega \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \omega)$.

8.2.4 Le théorème du transport

Le théorème suivant joue un rôle fondamental en probabilités. C'est sur lui que reposent presque tous les calculs pratiques d'espérance et de loi.

Théorème 8.2.8 *Soit f une application mesurable de l'espace mesuré (Ω, \mathcal{A}, m) dans l'espace mesurable (Ω', \mathcal{A}') et $\Phi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On rappelle que m_f*

désigne la mesure image de m par f . Alors

$$\Phi \in \mathcal{L}^1(m_f) \Leftrightarrow \Phi \circ f \in \mathcal{L}^1(m)$$

et, dans ce cas,

$$\int_{\Omega'} \Phi dm_f = \int_{\Omega} \Phi \circ f dm. \quad (8.6)$$

Cette égalité reste vraie sans hypothèse d'intégrabilité si Φ est positive.

DÉMONSTRATION :

Si Φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors (8.6) se déduit immédiatement de la définition de m_f (définition 8.1.20) et de la linéarité de l'intégrale. Si Φ est positive alors d'après la proposition 8.1.16, c), Φ est limite croissante d'une suite (Φ_n) de fonctions qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. De même $\Phi \circ f$ est limite croissante de $(\Phi_n \circ f)$ et le résultat s'obtient par convergence monotone à partir de l'égalité (8.6) appliquée à (Φ_n) . Enfin, dans le cas général, la formule (8.6) appliquée à $|\Phi|$ montre que $\Phi \in \mathcal{L}^1(m_f) \Leftrightarrow \Phi \circ f \in \mathcal{L}^1(m)$ et (8.6) s'obtient en posant $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$.

Remarque 8.2.9 Si X est une v.a. réelle le théorème du transport réconcilie la définition abstraite de l'espérance

$$E(\Phi(X)) = \int_{\Omega} \Phi \circ X dP$$

avec la définition plus élémentaire

$$E(\Phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dP_X(x).$$

basée sur la loi de X .

8.2.5 La formule de changement de variable

Soient Ω et Ω' deux ouverts de \mathbb{R}^n et

$$f : \Omega \rightarrow \Omega',$$

$$x \rightarrow (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

un C^1 -difféomorphisme, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 dont la réciproque $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ est C^1 . On note

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$$

la *matrice jacobienne* de f en x et $\det(Df(x))$ le *déterminant jacobien* de f en x .

Rappelons, sans démonstration, l'importante formule de changement de variable.

Théorème 8.2.10 (Changement de variable). *Soit $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable, et m la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω :*

$$m(dx) = \mathbf{1}_\Omega(x)\rho(x)dx.$$

Alors, la mesure image de m par f est la mesure de densité $\rho(f^{-1})|\det(Df^{-1})|$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω' :

$$m_f(dy) = \mathbf{1}_{\Omega'}(y)\rho(f^{-1}(y))|\det Df^{-1}(y)|dy.$$

Ainsi, (d'après le théorème 8.2.8) pour toute fonction mesurable $\Phi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ positive ou dans $\mathcal{L}^1(m_f)$,

$$\int_{\Omega} \Phi(f(x))m(dx) = \int_{\Omega'} \Phi(y)\rho(f^{-1}(y))|\det Df^{-1}(y)|dy.$$

Remarques 8.2.11 Rappelons que

– f est C^1 si et seulement si les dérivées partielles $x \in \Omega \rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existent et sont continues ;

– d'après le théorème d'inversion locale, f est un C^1 -difféomorphisme si et seulement si f est une bijection de classe C^1 et $\det(Df(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$;

– d'après la formule de dérivation d'une fonction composée, $Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$, d'où

$$\det(Df^{-1}(y)) = \frac{1}{\det(Df(f^{-1}(y)))}.$$

8.2.6 Le théorème de Fubini

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ deux espaces mesurés. Rappelons (voir exemple 8.1.6) que la tribu produit sur l'espace $E_1 \times E_2$, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, est la tribu engendrée par les pavés $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2$.

Si une fonction réelle f est mesurable par rapport à cette tribu, pour tout $x_1 \in E_1$, la fonction $x_2 \rightarrow f(x_1, x_2)$ est mesurable par rapport à \mathcal{E}_2 . On a évidemment la même propriété en changeant l'ordre des indices.

DÉMONSTRATION :

La preuve résulte d'arguments standards par rapport aux tribus. Nous introduisons la sous-classe de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ des événements A dont les fonctions indicatrices jouissent de la propriété précédente. Cette sous-classe est clairement une tribu qui contient les pavés et donc la tribu engendrée par les pavés. La propriété de mesurabilité est donc vraie pour toutes les indicatrices d'ensembles de la tribu produit. Par linéarité c'est encore vrai pour toutes les fonctions mesurables qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et par monotonie, pour toutes les fonctions mesurables positives.

Nous pouvons donc définir $g(x_1) = \int f(x_1, x_2) dm_2(x_2)$ fonction définie sur E_1 . Montrer que cette fonction est mesurable est plus compliqué que précédemment, car le sous-ensemble des $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ pour lesquels les indicatrices vérifient cette propriété de mesurabilité n'est pas trivialement une tribu. On rencontre exactement la même difficulté que dans le théorème d'unicité, qu'on résout de la même façon en montrant que c'est un d -système.

Ces arguments de mesurabilité étant résolus, on peut montrer le théorème de Fubini.

Théorème 8.2.12 (Théorème de Fubini). *Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ deux espaces mesurés, avec m_1 et m_2 σ -finies.*

Fubini positif *Pour toute fonction f $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurable, et positive, l'intégrale par rapport à la mesure produit se calcule par intégrations successives.*

$$\begin{aligned} \int f dm_1 \otimes m_2 &= \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) \\ &= \int \left(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2). \end{aligned}$$

Fubini intégrable *Si f est de signe quelconque, mais que $\int |f| dm_1 \otimes m_2 < \infty$, la propriété d'interversion de l'ordre d'intégration reste valable.*

DÉMONSTRATION :

Soient $I_1(f)$, $I_2(f)$ et $I_3(f)$ le premier, deuxième et dernier membre de l'égalité que nous voulons prouver. Clairement $I_1(\mathbf{1}_{A_1 \times A_2}) = I_2(\mathbf{1}_{A_1 \times A_2}) = I_3(\mathbf{1}_{A_1 \times A_2})$ pour $A_1 \in \mathcal{E}_1$ et $A_2 \in \mathcal{E}_2$. Comme de plus l'application $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow I_i(\mathbf{1}_A)$ est clairement une mesure, cette égalité s'étend à tout $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ d'après le théorème d'unicité des mesures. Cette égalité s'étend ensuite par linéarité à toute fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, puis par convergence monotone, à toute fonction f mesurable positive. Dans le cas où f est intégrable, il suffit d'appliquer les résultats précédents à f^+ et f^- , et de faire la différence car les intégrales sont finies.

Remarque 8.2.13 Dans la pratique, on applique Fubini positif à la valeur absolue, pour montrer que les intégrales sont finies, puis on calcule l'intégrale, sans module en jouant sur les ordres d'intégration.

8.3 Inégalités et espaces \mathbb{L}^p

8.3.1 Inégalités de Jensen, Markov et Chebyshev

Les inégalités suivantes sont des outils très utiles du calcul des probabilités.

Théorème 8.3.1 (Inégalité de Jensen). *Soit X une v.a.r. et $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, si X et $\Phi(X)$ sont intégrables*

$$\Phi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\Phi(X)).$$

DÉMONSTRATION :

Par convexité, Φ admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une dérivée à gauche $\Phi'_g(x)$, et

$$\Phi(y) - \Phi(x) \geq \Phi'_g(x)(y - x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi $\Phi(X) - \Phi(\mathbb{E}(X)) \geq \Phi'_g(\mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))$. Le résultat s'obtient en prenant l'espérance de cette inégalité.

Théorème 8.3.2 (Inégalité de Markov). *Soit X une v.a.r. Alors, pour tout $t > 0$*

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

DÉMONSTRATION :

Il suffit de prendre l'espérance de l'inégalité

$$t\mathbf{1}_{X \geq t} \leq X\mathbf{1}_{X \geq t} \leq |X|.$$

Exemple 8.3.3 (Inégalité de Chebyshev). Comme $\{X \geq t\} \subset \{|X|^p \geq t^p\}$, l'inégalité de Markov a pour conséquence que

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{t^p}.$$

Si X^2 est intégrable, en appliquant cette inégalité à la variable $Y = |X - E(X)|$ on obtient l'inégalité de Chebyshev

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\text{var}(X)}{t^2},$$

où

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

8.3.2 Espaces \mathbb{L}^p

Rappelons que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(m)$ désigne l'ensemble des applications mesurables intégrables. Deux fonctions f et g qui sont égales $m - p.p.$ ($m(f \neq g) = 0$) ont la même intégrale. Nous ne les distinguerons pas dans la suite, et désignerons par \mathbb{L}^1 l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation d'égalité. De même,

Proposition 8.3.4 (Espaces \mathbb{L}^p). *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace \mathbb{L}^p est l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de puissance p^e intégrable. On le munit de la norme*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

C'est un espace vectoriel, normé, complet.

Ces propriétés reposent sur les inégalités de Minkowski et de Hölder

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{8.7}$$

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \text{ pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8.8}$$

L'espace \mathbb{L}^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, dm.$$

DÉMONSTRATION :

Commençons par montrer l'inégalité (8.8). Si $\|g\|_q = 0$ alors $g = 0$ $m - p.p.$ et l'inégalité est triviale. Si $\|g\|_q \neq 0$, soit μ la probabilité de densité $|g|^q / \|g\|_q^q$ par rapport à m .

Alors

$$\int |fg| dm = \left(\int |f| |g|^{1-q} d\mu \right) \|g\|_q^q.$$

Soit $h_n = \inf\{|f||g|^{1-q}, n\}$ pour $n \geq 1$. D'après l'inégalité de Jensen

$$\left(\int h_n d\mu\right)^p \leq \int h_n^p d\mu,$$

et par convergence monotone

$$\left(\int |f||g|^{1-q} d\mu\right)^p \leq \int |f|^p |g|^{(1-q)p} d\mu = \int |f|^p |g|^{-q} d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}.$$

Ainsi

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}\right)^{1/p} \|g\|_q^q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Nous passons maintenant à la preuve de l'inégalité de Minkowski. Pour $p = 1$, c'est une conséquence immédiate de l'inégalité (c) du théorème 8.2.3 et de l'inégalité triangulaire. Pour $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p^p \leq \| |f| + |g| \|_1^{p-1} + \| |f| + |g| \|_1 \leq \| |f| + |g| \|_1^{p-1} + \| |f| + |g| \|_1$$

d'après la remarque qui précède. D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) (\| |f| + |g| \|_1^{p-1}) = (\|f\|_p + \|g\|_p) (\|f + g\|_p^{p-1}).$$

Ce qui prouve le résultat.

Nous admettons sans démonstration le caractère complet des espaces \mathbb{L}^p .

Corollaire 8.3.5 *Si m est une probabilité, alors pour tout $1 \leq p \leq q$,*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q.$$

DÉMONSTRATION :

Par l'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions f^p et 1

$$\|f^p \cdot 1\|_1 \leq \|f^p\|_{q/p},$$

ce qui est l'inégalité à montrer.

8.4 Indépendance

Nous rappelons dans cette section les définitions classiques d'indépendance d'événements, de tribus et de variables aléatoires. On suppose donné un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

8.4.1 Événements indépendants

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} indicée par un ensemble non vide I .

Définition 8.4.1 *Les événements $\{A_i\}$ sont dits mutuellement indépendants si pour toute famille finie $\{i_1, \dots, i_n\}$ d'éléments distincts de I*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

Ils sont dits deux à deux indépendants si pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Il est immédiat que des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 8.4.2 On lance deux pièces de monnaie. Soit A (respectivement B) l'événement "la première pièce tombe sur pile" (respectivement "la seconde pièce tombe sur face") et C l'événement "les deux pièces tombent sur le même côté." Alors $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ et $P(A \cap B \cap C) = 0$. Les événements sont donc deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

8.4.2 Tribus indépendantes

Soit $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ une famille de sous tribus de \mathcal{A} indicée par un ensemble non vide I .

Définition 8.4.3 *Les tribus $\{\mathcal{A}_i\}$ sont dites mutuellement indépendantes ou simplement indépendantes si pour toute famille finie $\{i_1, \dots, i_n\}$ d'éléments distincts de I et pour tout choix de $A_{i_k} \in \mathcal{A}_{i_k}$,*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

Remarquons que cette définition généralise la définition 8.4.1 en ce sens que des événements $\{A_i\}$ sont mutuellement indépendants si et seulement si les tribus engendrées $\{\sigma(A_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}\}$ le sont.

8.4.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 8.4.4 Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires. Les variables $\{X_i\}$ sont dites *mutuellement indépendantes* si et seulement si les tribus engendrées $\sigma(X_i)$ le sont.

Proposition 8.4.5 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) les variables $\{X_i\}$ sont **mutuellement indépendantes** ;
- (ii) pour toute famille finie $\{i_1, \dots, i_n\}$ d'éléments distincts de I et pour tout choix de fonctions boréliennes bornées $f_{i_k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f_{i_1}(X_{i_1}) \dots f_{i_n}(X_{i_n})) = \mathbb{E}(f_{i_1}(X_{i_1})) \dots \mathbb{E}(f_{i_n}(X_{i_n})) ;$$

- (iii) pour toute famille finie $\{i_1, \dots, i_n\}$ d'éléments distincts de I , la loi du vecteur $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ est égale au produit des lois marginales des vecteurs X_{i_1}, \dots, X_{i_n} .
Soit

$$P_{X_{i_1}, \dots, X_{i_n}} = P_{X_{i_1}} \dots P_{X_{i_n}}.$$

DÉMONSTRATION :

Les implications $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ sont immédiates. On déduit (ii) de (i) , comme dans la preuve du théorème de Fubini, d'abord pour des fonctions (f_{i_k}) qui sont des indicatrices de boréliens, puis des combinaisons linéaires finies de telles fonctions, puis par convergence monotone à toute fonction mesurable bornée.

8.5 Convergences des variables aléatoires

Il existe différentes notions de convergence de variables aléatoires et il est important de bien comprendre les différences et les relations entre ces notions. Dans toute cette section nous supposons donnée une suite de v.a. réelles (X_n) définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Les définitions et les résultats énoncés ici subsistent pour des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d (il suffit de remplacer la valeur absolue par une norme sur \mathbb{R}^d).

8.5.1 Convergence presque sûre, en probabilité, et dans \mathbb{L}^p .

Définition 8.5.1 Soit (X_n) une suite de v.a. réelles et X une v.a. réelle, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge vers X

(i) **presque sûrement**, si

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1,$$

dans ce cas on note $X_n \rightarrow X$ p.s. ;

(ii) **en probabilité**, si pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 ;$$

(iii) **dans \mathbb{L}^p** pour $p \geq 1$, si X_n et X sont dans \mathbb{L}^p et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

Nous avons déjà rencontré la notion de convergence presque sûre à plusieurs reprises, notamment dans les théorèmes de convergence monotone et dominée. Cette notion de convergence correspond à la *convergence simple* ou *ponctuelle* d'une suite de fonctions. En effet, dire que $X_n \rightarrow X$ p.s. équivaut à dire qu'il existe un ensemble $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que la suite de fonctions $\{X_n : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}\}$ converge simplement vers $\{X : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

La convergence en probabilité est une notion plus faible de convergence, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 8.5.2 $X_n \rightarrow X$ p.s. si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{n \geq m} |X_n - X| > \epsilon \right) = 0.$$

En particulier, la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

DÉMONSTRATION :

Par définition de la convergence d'une suite dans \mathbb{R}

$$\{X_n \rightarrow X\}^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} \{|X_n - X| > 1/k\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sup_{n \geq m} |X_n - X| > 1/k \right\}.$$

Ainsi, $X_n \rightarrow X$ p.s. si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \sup_{n \geq m} |X_n - X| > 1/k \right) = 0.$$

Soit encore, en utilisant la propriété de monotonie 8.1.18 (iv),

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{n \geq m} |X_n - X| > 1/k \right) = 0.$$

Comme pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\epsilon > 1/k$, cette dernière assertion est équivalente à l'assertion énoncée dans la proposition.

Exemple 8.5.3 Soit (p_n) une suite de nombres dans $[0, 1]$, et (X_n) une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ de loi

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Alors,

$$X_n \rightarrow 0 \text{ en probabilité} \Leftrightarrow p_n \rightarrow 0.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli 8.1.19 (ii),

$$X_n \rightarrow 0 \text{ p.s.} \Leftrightarrow \sum_n p_n < \infty.$$

Cela fournit une classe d'exemples de suites de v.a. qui convergent en probabilité mais pas presque sûrement.

La proposition qui suit montre que la convergence en probabilité est "métrisable."

Proposition 8.5.4 Soit \mathcal{L}^0 l'ensemble des v.a. réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit \mathbb{L}^0 l'espace \mathcal{L}^0 quotienté par la relation d'équivalence $X \sim Y$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Soit $D : \mathbb{L}^0 \times \mathbb{L}^0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$D(X, Y) = \mathbb{E}(\inf(|X - Y|, 1)).$$

Alors,

- (i) D est une distance sur \mathbb{L}^0 ;
- (ii) $X_n \rightarrow X$ en probabilité si et seulement si $D(X_n, X) \rightarrow 0$;

(iii) l'espace (\mathbb{L}^0, D) est un espace métrique complet.

DÉMONSTRATION :

(i) On vérifie facilement que D est une distance.

(ii) D'après l'inégalité de Markov (8.3.2), pour $0 < \epsilon < 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(\inf(|X_n - X|, 1) \geq \epsilon) \leq \frac{D(X_n, X)}{\epsilon}. \quad (8.9)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} D(X_n, X) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| \geq \epsilon} \inf(|X_n - X|, 1)) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| < \epsilon} \inf(|X_n - X|, 1)) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| \geq \epsilon}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| < \epsilon} |X_n - X|) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve (ii).

(iii) Pour prouver que \mathbb{L}^0 est complet, soit (X_n) une suite de Cauchy pour la distance D . En utilisant l'inégalité (8.9) et la condition de Cauchy, on voit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P}(|X_n - X_{n_0}| \geq \epsilon) \leq \epsilon.$$

On peut donc construire une suite $\{n_k\}$ telle que

$$\mathbb{P}(|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \geq 1/2^k) \leq 1/2^k.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli (théorème 8.1.19) l'événement

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq m} \{|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| < 1/2^k\}$$

est donc de probabilité 1. Cela prouve que la suite $(X_{n_k}(\omega))$ est de Cauchy dans \mathbb{R} (donc convergente) pour presque tout ω . Soit $X(\omega)$ la limite de $X_{n_k}(\omega)$. D'après la proposition 8.5.2, (X_{n_k}) converge en probabilité vers X . La v.a. X est donc une valeur d'adhérence de la suite (X_n) , et comme (X_n) est de Cauchy, (X_n) converge vers X .

Remarque 8.5.5 Dans la pratique, le caractère complet de \mathbb{L}^0 peut s'utiliser ainsi. Soit (X_n) une suite de v.a. réelles. Supposons que (X_n) vérifie le critère de Cauchy en probabilité :

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \mathbb{P}(|X_n - X_m| \geq \epsilon) \leq \epsilon,$$

alors (X_n) converge en probabilité vers une v.a. X .

Une conséquence importante du caractère métrisable de la convergence en probabilité est le théorème suivant qui précise la relation entre convergence p.s. et convergence en probabilité.

Théorème 8.5.6 *La suite (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si de toute suite croissante (déterministe) d'entiers (n_k) on peut extraire une sous-suite (n_{k_j}) telle que $X_{n_{k_j}} \rightarrow X$ p.s.*

DÉMONSTRATION :

Supposons que $X_n \rightarrow X$ en probabilité. Soit (n_k) une suite donnée d'entiers. Donnons nous une suite $\{u_j\}$ déterministe positive convergeant vers 0 (par exemple $u_j = 1/j$.) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ soit n_{k_j} le plus petit entier tel que

$$P(|X_{n_k} - X| \geq u_j) \leq 1/2^j.$$

Alors, d'après le lemme de Borel-Cantelli (théorème 8.1.19), $|X_{n_{k_j}} - X| \leq u_j$ pour j assez grand, presque sûrement. En particulier, $X_{n_{k_j}} \rightarrow X$ p.s.

Réciproquement, si de toute suite (n_k) on peut extraire une sous-suite (n_{k_j}) telle que $X_{n_{k_j}} \rightarrow X$ p.s., alors d'après la proposition 8.5.2, $D(X_{n_{k_j}}, X) \rightarrow 0$ où D est la distance définie dans la proposition 8.5.4. Cela prouve que $D(X_n, X) \rightarrow 0$, car si cela n'était pas le cas on pourrait trouver une suite (n_k) et $\epsilon > 0$ tels que $D(X_{n_k}, X) \geq \epsilon$.

Corollaire 8.5.7 *Si (X_n) est une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d qui converge en probabilité vers un vecteur X et $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\Phi(X_n) \rightarrow \Phi(X)$ en probabilité. En particulier, la convergence en probabilité est stable par les opérations algébriques usuelles : Si (X_n) (resp. (Y_n)) est une suite de v.a. réelles qui converge en probabilité vers une v.a. X (resp. Y) alors,*

$$cX_n + Y_n \rightarrow cX + Y,$$

$$X_n Y_n \rightarrow XY,$$

et

$$\sup(X_n, Y_n) \rightarrow \sup(X, Y)$$

en probabilité.

DÉMONSTRATION :

Soit (n_k) une suite croissante d'entiers. D'après le théorème 8.5.6, il existe une sous-suite (n_{k_j}) telle que $X_{n_{k_j}} \rightarrow X$ p.s. D'où $\Phi(X_{n_{k_j}}) \rightarrow \Phi(X)$ p.s. par continuité de Φ et $\Phi(X_n) \rightarrow \Phi(X)$ en probabilité d'après le théorème 8.5.6. Pour démontrer la seconde partie du corollaire, il suffit de considérer les fonctions $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\Phi(x, y) = cx + y$, xy , $\sup(x, y)$.

La convergence dans \mathbb{L}^p est juste la convergence pour la topologie qui fait de \mathbb{L}^p un espace vectoriel normé.

Proposition 8.5.8 *Soient $p \geq q \geq 0$. Si (X_n) converge vers X dans \mathbb{L}^p , alors (X_n) converge vers X dans \mathbb{L}^q . En particulier la convergence dans \mathbb{L}^2 entraîne la convergence dans \mathbb{L}^1 et la convergence dans \mathbb{L}^1 entraîne la convergence en probabilité.*

DÉMONSTRATION :

Soient $p \geq q > 0$ et $\alpha = p/q \geq 1$. D'après l'inégalité de Jensen (théorème 8.3.1)

$$\mathbb{E}(|Y|^p) = \mathbb{E}((|Y|^q)^\alpha) \geq \mathbb{E}(|Y|^q)^\alpha.$$

Ceci prouve que $\mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^q$ et que la convergence dans \mathbb{L}^p entraîne la convergence dans \mathbb{L}^q .

Supposons maintenant $p > q = 0$. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \mathbb{E}(|X_n - X|^p).$$

D'où le résultat.

Afin de démontrer une réciproque à la dernière assertion de la proposition précédente, nous avons besoin d'introduire la notion d'*uniforme intégrabilité*. Une suite (X_n) de v.a. intégrables est dite uniformément intégrable (U.I) si

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) = 0.$$

Proposition 8.5.9 *Soit (X_n) une suite de v.a.r.*

(i) *Si (X_n) est U.I alors (X_n) est bornée dans \mathbb{L}^1 , c'est-à-dire*

$$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

(ii) *Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

(a) *(X_n) est dominée par une variable \mathbb{L}^1 (i.e. $|X_n| \leq Y$ p.s. avec Y intégrable),
ou*

(b) *(X_n) est bornée dans \mathbb{L}^p pour $p > 1$ (i.e. $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$),*

alors (X_n) est U.I.

DÉMONSTRATION :

(i) $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) \leq \sup_n \mathbf{E}(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \leq c}) + \sup_n \mathbf{E}(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c})$. Le premier terme est borné par c et le second est borné car convergent.

(ii) Supposons $|X_n| \leq Y$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) &\leq \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_{Y \geq \sqrt{c}}) + \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_{Y \leq \sqrt{c}} \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) \\ &\leq \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_{Y \geq \sqrt{c}}) + \sqrt{c} \mathbf{P}(|X_n| \geq c) \\ &\leq \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_{Y \geq \sqrt{c}}) + \frac{\sqrt{c}}{c} \mathbf{E}(|X_n|) \end{aligned}$$

par l'inégalité de Markov. Le premier terme de cette dernière inégalité tend vers 0 pour $c \rightarrow \infty$ par convergence monotone, et le second terme est borné par $\frac{\mathbf{E}(Y)}{\sqrt{c}}$.

Si maintenant (X_n) est bornée dans \mathbb{L}^p pour $p > 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq c}) &\leq \|X_n\|_p \mathbf{P}(|X_n| \geq c)^{1/q} \\ &\leq \|X_n\|_p \left(\frac{\mathbf{E}(|X_n|^p)}{c^p} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

par application successive des inégalités de Hölder et de Markov.

Théorème 8.5.10 *Soit (X_n) une suite de v.a. uniformément intégrable. Si (X_n) converge en probabilité vers une v.a. X , alors (X_n) converge aussi vers X dans \mathbb{L}^1 .*

DÉMONSTRATION :

Vérifions d'abord que X est intégrable. D'après le théorème 8.5.6 il existe une sous-suite telle $X_{n_k} \rightarrow X$ p.s. Ainsi

$$\mathbf{E}(|X|) \leq \liminf_{n_k \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_{n_k}) < \infty$$

où la première inégalité se déduit du lemme de Fatou 8.2.4 et la seconde de la proposition 8.5.9.

Maintenant, soit $Y_n = |X_n - X|$. L'uniforme intégrabilité de (X_n) et l'intégrabilité de X font de (Y_n) une suite U.I (la vérification de ce point est laissée au lecteur). Pour tout $\epsilon > 0$

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq \epsilon}) + \mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n < \epsilon}) \leq \mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq \epsilon}) + \epsilon.$$

Choisissons $c > \epsilon$ tel que $\mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq c}) \leq \epsilon$. Alors

$$\mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq \epsilon}) \leq \mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{Y_n \geq c}) + \mathbf{E}(Y_n \mathbf{1}_{c \geq Y_n \geq \epsilon}) \leq \epsilon + c \mathbf{P}(Y_n \geq \epsilon).$$

Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(Y_n) \leq 2\epsilon$$

car $Y_n \rightarrow 0$ en probabilité. Comme ϵ est arbitraire cela prouve le résultat.

8.6 Convergence en loi.

8.6.1 Exemples et définition

Le dernier type de convergence que nous allons considérer concerne la convergence des lois de variables aléatoires. C'est une notion essentielle. Pour justifier la définition qui va suivre, considérons auparavant quelques exemples de telles convergences.

Exemples

- 1) Une suite $(p_n = (p_n(x), x \in \mathbb{Z}^d), n \geq 1)$ de probabilités sur \mathbb{Z}^d (ou sur une partie de \mathbb{Z}^d) est dite converger vers une probabilité $p(\cdot)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = p(x) \text{ pour tout } x.$$

Alors pour toute fonction réelle bornée f sur l'espace des x , les espérances de f associées aux p_n convergent vers l'espérance de f associée à p , soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_x f(x) p_n(x) = \sum_x f(x) p(x).$$

Ce résultat n'est pas immédiat lorsque les sommes précédentes sont infinies. Pour le voir, on écrit que pour tout ensemble A ,

$$\left| \sum_x f(x) p_n(x) - \sum_x f(x) p(x) \right| \leq \left[\sum_A |p_n(x) - p(x)| + \sum_{A^c} p_n(x) + \sum_{A^c} p(x) \right] \sup_x |f(x)|$$

et on remarque que lorsque $n \rightarrow \infty$, si A est fini,

$$\sum_{A^c} p_n(x) = 1 - \sum_A p_n(x) \rightarrow 1 - \sum_A p(x) = \sum_{A^c} p(x)$$

de sorte que, toujours si A est fini,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_x f(x) p_n(x) - \sum_x f(x) p(x) \right| \leq 2 \left[\sum_{A^c} p(x) \right] \sup_x |f(x)|$$

Il reste enfin à faire tendre A vers \mathbb{Z}^d pour pouvoir conclure.

- 2) Des probabilités discrètes peuvent converger vers des densités de probabilité sur \mathbb{R}^d si les supports de ces probabilités discrètes tendent à devenir denses dans \mathbb{R}^d , comme dans le théorème de de Moivre. Voici un autre exemple simple d'une telle situation.

La suite des probabilités uniformes sur la grille $(k/2^n; 1 \leq k \leq 2^n)$, soit

$$\mu_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_{k/2^n},$$

converge lorsque $n \rightarrow \infty$ vers la probabilité de Lebesgue sur $[0, 1]$ car pour tout intervalle de $[0, 1] : \mu_n([a, b]) \rightarrow b - a$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Notons aussi que

$$\int f(x) d\mu_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} f(k/2^n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$

du moins si la fonction f est continue (et donc bornée) sur $[0, 1]$.

- 3) Pour une suite $(p_n(\cdot), n \geq 1)$ de densités de probabilité sur \mathbb{R}^d convergeant en chaque point vers une densité $p(\cdot)$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = p(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$), nous pourrions affirmer par le théorème de convergence dominée que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) p_n(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) p(x) dx$$

pourvu que les p_n vérifient la condition de domination

$$|p_n(x)| \leq q(x) \quad \forall n, x \text{ avec } \int_{\mathbb{R}^d} q(x) dx < \infty$$

(la suite des $f p_n$ vérifie alors une condition analogue puisque f est bornée). Dans ces conditions les lois de probabilité $p_n(x) dx$ convergent vers $p(x) dx$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

- 4) Les densités gaussiennes centrées sur \mathbb{R}

$$g_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma^2)$$

dépendent continûment de leur paramètre σ lorsque celui-ci parcourt $]0, \infty[$ et d'après l'exemple 3) précédent, les mesures $g_\sigma(x) dx$ dépendent continûment de σ au sens où les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f(x) g_\sigma(x) dx$ en dépendent continûment (f borélienne bornée).

Lorsque $\sigma \downarrow 0$, ces densités gaussiennes fournissent un exemple de probabilités sur \mathbb{R} admettant des densités et convergeant vers une probabilité discrète, ici la masse unité δ_0 à l'origine. En effet, par le changement de variables $y = x/\sigma$

$$\int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} g_\sigma(x) dx = \int_{\{|y| \leq \varepsilon/\sigma\}} g_1(y) dy \nearrow 1$$

lorsque $\sigma \downarrow 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$. On voit alors facilement que pour toute fonction borélienne bornée, continue au moins à l'origine,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) g_{\sigma^2}(x) dx \rightarrow f(0) = \int_{\mathbb{R}} f d\delta_0 \text{ lorsque } \sigma \downarrow 0.$$

Cette liste d'exemples nous conduit à la définition suivante.

Définition 8.6.1 Une suite (μ_n) de probabilités sur \mathbb{R}^d est dite **converger étroitement** vers une probabilité μ sur \mathbb{R}^d , si pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu.$$

Une suite (X_n) de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d est dite **converger en loi** vers un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^d$, si la suite des lois de (X_n) converge étroitement vers la loi de X . Soit encore, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(X_n)) = E(f(X)),$$

pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

La convergence étroite $\mu_n \rightarrow \mu$ n'entraîne pas sans restriction sur F que $\mu_n(F) \rightarrow \mu(F)$ pour tout borélien F , ou même pour tout pavé F . Dans l'exemple 4 par exemple, l'intervalle $[0, \infty[$ est de mesure $\int_0^\infty g_\sigma(x) dx$ égale à $1/2$ quel que soit $\sigma > 0$, mais de mesure 1 pour la limite δ_0 . Néanmoins :

Proposition 8.6.2 Soient μ_n ($n \geq 1$) et μ des probabilités sur \mathbb{R}^d telles que $\mu_n \rightarrow \mu$ étroitement lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors pour tout borélien B de frontière $\partial B := \overline{B} \cap \overline{B^c}$ de probabilité $\mu(\partial B) = 0$, :

$$\mu_n(B) \rightarrow \mu(B) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (8.10)$$

Inversement cette condition est suffisante pour que μ_n converge vers μ étroitement.

Par exemple sur \mathbb{R} , si la probabilité limite μ possède une densité, la convergence (8.10) aura lieu pour tout intervalle (car dans ce cas ∂B se réduit à deux points au plus). De même sur \mathbb{R}^d , pour tout domaine de frontière suffisamment régulière pour être de mesure de Lebesgue nulle, (8.10) est valable si μ possède une densité.

DÉMONSTRATION :

1) Si G est un ouvert de \mathbb{R}^d , les fonctions

$$\varphi_k(x) = \min(1, k d_G(x)) \quad (k \geq 1)$$

où $d_G(x) = \inf(|x - y| ; y \notin G)$ désigne la distance à G^c , sont continues, bornées et croissent vers 1_G lorsque $k \nearrow \infty$. Il s'ensuit que pour tout k fixé

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_k d\mu_n = \int \varphi_k d\mu$$

et donc en faisant tendre $k \nearrow \infty$ que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

Par passage aux complémentaires, nous avons aussi pour tout fermé F

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F),$$

puisque μ_n et μ sont des probabilités.

2) Pour un borélien quelconque B de \mathbb{R}^d , soient alors $F = \overline{B}$ sa fermeture et $G = (\overline{B^c})^c$ son ouverture; on a $G \subset B \subset F$ et $\partial B = F \setminus G$. Alors si $\mu(\partial B) = 0$, c'est-à-dire si $\mu(G) = \mu(F)$, les inégalités

$$\mu_n(G) \leq \mu_n(B) \leq \mu_n(F) \quad \text{et} \quad \mu(G) \leq \mu(B) \leq \mu(F)$$

avec les deux résultats précédents

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

impliquent que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B)$ existe et vaut $\mu(B)$.

3) Démontrons la réciproque. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, l'ouvert $\{f > a\}$ possède une frontière de μ -probabilité nulle pour tout $a \in \mathbb{R}$, à l'exception éventuelle d'une famille dénombrable de tels a ; en effet $\partial(\{f > a\}) \subset \{f = a\}$ et $\{a : \mu(\{f = a\}) > 1/k\}$ contient moins de k points. Donc sous la condition (8.10),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{f > a\}) = \mu(\{f > a\})$$

sauf au plus pour un ensemble dénombrable de a . Or, si f est positive

$$\int f \, d\mu_n = \int_0^{\|f\|} \mu_n(\{f > a\}) \, da \quad \text{si} \quad \|f\| = \sup_x |f(x)|$$

et par conséquent par convergence dominée, $\int f \, d\mu_n \rightarrow \int f \, d\mu$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette convergence s'étend immédiatement aux fonctions de signe quelconque.

Le lemme technique suivant est souvent utile.

Lemme 8.6.3 *Soit $C_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions réelles continues sur \mathbb{R}^d tendant vers zéro à l'infini. Pour que la suite $(\mu_n, n \geq 1)$ de probabilités sur \mathbb{R}^d converge étroitement vers la probabilité μ lorsque $n \rightarrow \infty$, il suffit alors que $\int f \, d\mu_n \rightarrow \int f \, d\mu$ pour toute fonction f de C_0 ou même seulement pour toute fonction d'un sous-ensemble dense pour la norme sup de cet espace.*

DÉMONSTRATION :

Soit $(\varphi_k, k \geq 1)$ une suite croissante de fonctions continues positives sur \mathbb{R}^d à supports compacts telle que $\varphi_k(x) \nearrow 1$ lorsque $k \nearrow \infty$ pour tout x (par exemple $\varphi_k = 1$, $k + 1 - |x|$ ou 0 selon que $|x| \leq k$, $k < |x| \leq k + 1$ ou que $k + 1 < |x|$). Alors si $\mu_n \rightarrow \mu$ sur C_0 et si f est continue et bornée, les fonctions $f\varphi_k$ ($k \geq 1$) appartiennent à C_0 de sorte que pour tout k

$$\int f\varphi_k \, d\mu_n \rightarrow \int f\varphi_k \, d\mu$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Mais

$$\left| \int f \, d\mu - \int f \varphi_k \, d\mu \right| \leq \int |f|(1 - \varphi_k) \, d\mu \leq \sup_x |f(x)| \left[1 - \int \varphi_k \, d\mu \right]$$

et par conséquent, en appliquant cette inégalité aussi aux μ_n ,

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu_n - \int f \, d\mu \right| &\leq \left| \int f \varphi_k \, d\mu_n - \int f \varphi_k \, d\mu \right| \\ &+ \sup_x |f(x)| \left(\left[1 - \int \varphi_k \, d\mu_n \right] + \left[1 - \int \varphi_k \, d\mu \right] \right) \\ &\rightarrow 2 \sup_x |f(x)| \left(1 - \int \varphi_k \, d\mu \right) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \\ &\rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré lorsque $\mu_n \rightarrow \mu$ sur C_0 . L'extension au cas où la convergence n'a lieu que sur un sous-ensemble dense de C_0 est facile puisque

$$\left| \int f \, d\mu_n - \int g \, d\mu_n \right| \leq \sup_x |f(x) - g(x)|$$

uniformément en n .

Voici une conséquence de ce lemme.

Corollaire 8.6.4 *Si la suite des v.a. X_n converge en probabilité vers la v.a. X alors cette suite converge aussi en loi vers X .*

DÉMONSTRATION :

Toute fonction f de C_0 est uniformément continue et par suite

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(f(X_n)) - \mathbf{E}(f(X))| &\leq \mathbf{E}(|f(X_n) - f(X)|) \\ &\leq \sup_{|z-y| \leq \varepsilon} |f(z) - f(y)| + 2 \sup_x |f(x)| \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\ &\rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \text{ puis } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Exemple 8.6.5 Soit X une v.a. gaussienne centrée sur \mathbb{R} et $X_n = -X$. Comme X et $-X$ ont même loi $X_n \rightarrow X$ en loi. Par contre (X_n) ne converge pas vers X en probabilité.

Résumé : Les implications qui suivent résument les relations entre les différentes notions de convergence.

p.s. \Rightarrow en proba \Rightarrow en loi,

dans $\mathbb{L}^q \Rightarrow$ dans \mathbb{L}^p (pour $q \geq p$) \Rightarrow en proba,
 en proba + uniformément intégrable \Leftrightarrow dans \mathbb{L}^1 .

8.6.2 Le théorème de Prohorov

Définition 8.6.6 Une suite (μ_n) de probabilités sur \mathbb{R}^d est dite **tendue**, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\mu_n(K) \geq 1 - \epsilon$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 8.6.7 Soit (μ_n) une suite tendue de probabilités sur \mathbb{R}^d . Alors

- (i) on peut extraire de (μ_n) une sous-suite qui converge étroitement ;
- (ii) si (μ_n) ne converge pas étroitement, on peut en extraire deux sous-suites qui convergent étroitement vers des probabilités distinctes.

Remarque 8.6.8 Ce théorème est encore vrai si (μ_n) est une suite de probabilités sur un espace polonais (un espace métrique séparable) (voir Billingsley [14] ou Stroock [29]).

DÉMONSTRATION :

La preuve est une conséquence de deux théorèmes importants d'analyse fonctionnelle (voir par exemple Rudin [27]) :

(a) **Le théorème de représentation de Riesz.** Une mesure *signée* μ sur \mathbb{R}^d est une fonction μ à valeurs réelles définie sur la tribu borélienne de \mathbb{R}^d qui peut s'écrire comme la différence de deux mesures positives finies : $\mu = \mu^1 - \mu^2$. L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures signées est un espace vectoriel normé pour la norme *en variation totale* définie par $|\mu| = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A)|$.

Soit $C_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$. Le théorème de Riesz permet d'identifier le dual topologique de $C_0(\mathbb{R}^d)$ (i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues $l : C_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$) avec $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, à tout élément $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on peut associer une forme linéaire continue $\langle \mu, \cdot \rangle$ sur $C_0(\mathbb{R}^d)$, définie par

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu.$$

L'application $\mu \rightarrow \langle \mu, \cdot \rangle$ est une isométrie (une bijection bicontinue préservant la norme) de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ sur le dual topologique de $C^0(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, $\mu \rightarrow \langle \mu, \cdot \rangle$ envoie bijectivement l'ensemble des mesures positives sur l'ensemble des formes linéaires l positives (i.e. $l(f) \geq 0$ pour $f \geq 0$).

(b) **Le théorème de Banach-Alaoglu.** Soit E un espace de Banach et E^* son dual topologique. La topologie *forte* sur E^* est la topologie induite par la norme définie par

$$\|l\| = \sup_{\{f \in E : \|f\|=1\}} |l(f)|$$

pour tout $l \in E^*$. Muni de cette norme E^* est un Banach. À l'exception du cas particulier où E est de dimension finie, la boule unité $B^* = \{l \in E^* \mid \|l\| \leq 1\}$ n'est jamais compacte pour la topologie forte. Pour "compactifier" B^* il faut munir E^* d'une topologie plus faible : la topologie **faible*. Nous n'allons pas nous attarder ici sur la définition de cette topologie. Disons simplement qu'une suite (l_n) d'éléments de E^* converge **faiblement* vers $l \in E^*$ si et seulement si

$$l_n(f) \rightarrow l(f)$$

pour tout $f \in E$. Le théorème de Banach-Alaoglu nous dit que B^* est compacte pour la topologie **faible*.

Soit maintenant (μ_n) une suite de probabilités sur \mathbb{R}^d . En appliquant ce qui précède avec $E = C_0(\mathbb{R}^d)$ et $E^* = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on peut extraire de (μ_n) une sous-suite (μ_{n_k}) qui converge **faiblement* vers une mesure signée μ . Comme μ_n est positive, la forme linéaire $f \rightarrow \int f d\mu$ est positive et μ est donc une mesure positive par le théorème de Riesz. Il reste à prouver que μ est une probabilité. Soit $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$. Comme (μ_n) est tendue, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r(\epsilon) > 0$ tel que $\mu_n(B_{r(\epsilon)}) \geq 1 - \epsilon$. Soit $f_r : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ la fonction $f_r(x) = (1 - d(x, B_r))^+$. Alors pour $r \geq r(\epsilon)$

$$1 \geq \int f_r d\mu_n \geq \mu_n(B_r) \geq 1 - \epsilon.$$

D'où, par convergence **faible*,

$$1 \geq \int f_r d\mu \geq 1 - \epsilon,$$

et

$$1 \geq \mu(\mathbb{R}^d) \geq 1 - \epsilon$$

par convergence monotone, car $\lim_{r \rightarrow \infty} f_r = 1$. Ceci prouve que μ est une probabilité et donc que (μ_{n_k}) converge étroitement vers μ d'après le lemme 8.10.

(ii) est une conséquence du fait que la topologie **faible* est métrisable. Ainsi $\mu_n \rightarrow \mu$ **faiblement* si et seulement si de toute sous-suite de (μ_n) on peut extraire une sous-suite qui converge **faiblement* vers μ .

8.6.3 Convergence étroite et fonctions caractéristiques

L'analyse de Fourier fournit un critère nécessaire et suffisant de convergence étroite extrêmement commode. Ce critère s'appuie naturellement sur l'injectivité de la transformation de Fourier que nous allons également établir.

Définition 8.6.9 Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , de loi \mathbb{P}_X . On appelle **fonction caractéristique** de X (ou de \mathbb{P}_X) la fonction $\Phi^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi^X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\mathbb{P}_X(x).$$

Remarquons que la fonction caractéristique est toujours bien définie, comme intégrale d'une fonction de module 1 (donc intégrable). Par ailleurs, $\Phi^X(t)$ n'est rien d'autre que la *transformée de Fourier* de \mathbb{P}_X prise au point $-t/2\pi$.

Exemple 8.6.10 (Fonction caractéristique d'une gaussienne). Soit G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite sur \mathbb{R}^d . Sa densité est

$$g_1(x) = (2\pi)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$$

et sa fonction caractéristique

$$\Phi^G(t) = \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2}\right).$$

On en déduit aisément la fonction caractéristique de la variable $AG + B$ pour toute matrice $A \in M_d(\mathbb{R})$ et tout vecteur $B \in \mathbb{R}^d$.

$$\Phi^{AG+B}(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle AG+B, t \rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle G, A^*t \rangle}) e^{i\langle B, t \rangle} = e^{i\langle B, t \rangle} \exp\left(-\frac{\|A^*t\|^2}{2}\right).$$

Le théorème suivant justifie la terminologie de fonction *caractéristique*. Sa démonstration s'appuie sur certaines propriétés des densités gaussiennes qui ont leur intérêt propre (nous ferons donc d'une pierre deux coups) et est due essentiellement à Weierstrass¹.

¹Mathématicien allemand du 19^e siècle.

Théorème 8.6.11 (i) *La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X sur \mathbb{R}^d détermine univoquement la loi P_X de X .*

(ii) *En particulier, si Φ^X est intégrable, P_X possède une densité continue, p_X , donnée par la transformée de Fourier inverse*

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \Phi^X(t) dt. \quad (8.11)$$

DÉMONSTRATION :

(i) On commence par remarquer, en utilisant la formule donnée dans l'exemple 8.6.10, que la formule d'inversion (8.11) est trivialement vérifiée pour la variable σG où G est une gaussienne centrée réduite sur \mathbb{R}^d et $\sigma > 0$.

Soit G une gaussienne centrée réduite indépendante de X et $X_\sigma = X + \sigma G$.

La loi de $X + \sigma G$ admet une densité p_{X_σ} donnée par

$$p_{X_\sigma}(x) = P_X * g_\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(x-y) P_X(dy).$$

D'où en appliquant la formule d'inversion valable pour σG

$$p_{X_\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x-y \rangle} \Phi^{\sigma G}(t) dt \right) P_X(dy),$$

puis par le théorème de Fubini,

$$p_{X_\sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^X(t) e^{-i\langle t, x \rangle} \Phi^{\sigma G}(t) dt. \quad (8.12)$$

Cela montre que Φ^X caractérise p_{X_σ} , donc P_{X_σ} (la loi de X_σ). Comme, par ailleurs P_{X_σ} converge étroitement vers P_X quand $\sigma \rightarrow 0$, (car $X_\sigma \rightarrow X$ p.s.), Φ^X caractérise bien P_X .

(ii) Si Φ^X est intégrable, on déduit de (8.12) et du théorème de convergence dominée que $p_{X_\sigma} \rightarrow p(x)$ quand $\sigma \rightarrow 0$, où

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^X(t) e^{-i\langle t, x \rangle} dt.$$

Par continuité sous le signe \int (théorème 8.2.5), la fonction p est continue. Comme P_{X_σ} converge étroitement vers P_X , on en déduit que p est nécessairement la densité de P_X .

Théorème 8.6.12 (Critère de convergence étroite). *Pour qu'une suite (X_n) de v.a. sur \mathbb{R}^d converge en loi vers X , il faut et il suffit que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{X_n}(t) = \Phi^X(t).$$

Si les probabilités $\mu_n, n \geq 1$ et μ sur \mathbb{R}^d ont des transformées de Fourier intégrables et si de plus

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Phi^{X_n} - \Phi^X(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

alors les densités p_n des P_{X_n} convergent uniformément sur \mathbb{R}^d vers la densité p de P_X lorsque $n \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION :

La condition est évidemment nécessaire par définition de la convergence en loi appliquée aux fonctions $x \rightarrow \cos(\langle t, x \rangle)$ et $x \rightarrow \sin(\langle t, x \rangle)$.

Réciproquement, supposons que $\Phi^{X_n}(t) \rightarrow \Phi^X(t)$. Nous allons en déduire que la suite (μ_n) des lois de (X_n) est tendue. Supposons cela déjà fait. Alors, d'après le théorème 8.6.7, (μ_n) est relativement compacte. Soit μ une valeur d'adhérence. Alors, la fonction caractéristique de μ est nécessairement égale à Φ^X (par convergence faible de (X_n) vers X) et $\mu = P_X$ (par injectivité de la fonction caractéristique). Cela prouve donc que $\mu_n \rightarrow P_X$ étroitement.

Il nous reste à prouver la tension de (X_n) . La tension de (X_n) étant équivalente à la tension de ses coordonnées, on peut, sans perte de généralité, supposer que $X_n \in \mathbb{R}$.

Par Fubini,

$$\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \operatorname{Re}(\Phi^{X_n}))(t) dt = \frac{1}{u} \int_0^u \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx)) \mu_n(dx) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\right) \mu_n(dx).$$

D'où, en utilisant la relation $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ pour $|x| \geq 1$, il vient

$$\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \operatorname{Re}(\Phi^X))(t) dt \geq (1 - \sin(1)) \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|X_n| \geq \frac{1}{u} \right).$$

Le terme de gauche peut être rendu arbitrairement petit en prenant u petit car Φ^X est continue et $\Phi^X(0) = 1$. Ceci conclut la preuve du premier point.

La seconde assertion du théorème se déduit facilement de la formule (8.11).

Bibliographie

Cours de l'école

- [1] J.M. Bony, *Intégration et analyse hilbertienne*, Édition 2001.
- [2] J.M. Bony, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Édition 1999.
- [3] F. Comets, *Aléatoire*, Édition 2002.
- [4] F. Comets, N. El Karoui, J. Neveu, *Probabilités*, Édition 2000.
- [5] N. El Karoui, E. Gobet, *Introduction au calcul stochastique*, Édition 2004.
- [6] N. El Karoui, *Couverture des risques et marchés financiers*, Édition 2004.
- [7] A. Georges et M. Mezard, *Physique statistique*, Édition 2001.
- [8] F. Laudenbach, *Calcul différentiel et intégral*, Édition 1999.
- [9] A. Monfort, *Introduction à la statistique*, Édition 1998.
- [10] J. Neveu, *Probabilités*, Édition 1997.
- [11] C. Viterbo, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Édition 2002.

Livres cités

- [12] P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilité*, Belin, 1998.
- [13] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic press, 1988.
- [14] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York, 1999.
- [15] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, *Probabilités et statistiques*, 2 vol. Dunod, 1982.
- [16] P. Diaconis, *Group Representation in Probability and Statistics*, IMS, Hayward, CA, 1988.
- [17] M. Duflo, *Méthodes récursives aléatoires*, Masson, Paris, 1990. English Translation : *Random Iterative Models*, Springer Verlag, 1997.

- [18] M. Dufo, *Algorithmes stochastiques*, Mathématiques et applications, Springer, 1996.
- [19] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its Applications*, 2 vol. Wiley, 1957.
- [20] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, Vol 60. Academic Press, 1974.
- [21] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance* Ellipses, 2^e édition, 1997.
- [22] R. Meyn, S. Tweedy, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer Verlag, 1996.
Disponible en ligne sur le site <http://black.cls.uiuc.edu/~meyn/pages/book.html>
- [23] J. Neveu, *Discrete Parameter Martingales*, North Holland, 1974.
- [24] G. Pagès, C. Bouzitat, *En passant par hasard...*, Vuibert, 1999.
- [25] D. Revuz, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1975.
- [26] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, 1966.
- [27] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, 1975.
- [28] L. Saloff-Coste, *Lectures on Finite Markov Chains*, P. Bernard, editor, École d'été de probabilité de Saint-Flour XXVI, number 1665, Springer-Verlag, 301-413, 1997.
- [29] D. Stroock, *Probability theory, an Analytic View*, Cambridge University Press, 1993.
- [30] P. S. Toulouse, *Thèmes de probabilités et statistiques*, Dunod, 1999.
- [31] H. White, *Artificial Neural Networks*, Blackwell, 1992.
- [32] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.
- [33] W. Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press, 2000.
- [34] B. Ycart, *Modèles et algorithmes markoviens*, Mathématiques et applications, Springer Verlag, 2002.

Articles cités

- [35] W. Arthur, "Self-reinforcing mechanisms in economics," In : *The economy as an evolving complex system*. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, CA, pp. 9-31, 1988.

- [36] E. Auriol, M. Benaïm, "Standardization in decentralized economies," *American Economic Review*, 90 (3), pp. 550-570, 2000.
- [37] L. Bachelier, "Théorie de la spéculation," *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 17, pp. 21-86, 1900.
- [38] M. Benaïm, "Dynamics of stochastic algorithms," *Séminaire de probabilités XXXIII*, pp. 1-68, 1999.
- [39] M. Brennan., E. Schwartz, "The valuation of American Put Options," *Journal of Finance*, 32, pp. 449-462, 1977.
- [40] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, "Option pricing : a simplified approach," *Journal of Economics*, 7, pp. 259-261, 1979.
- [41] P. Diaconis and D. Freedman, "Iterated random functions," *SIAM Review*, 41, 1, pp. 45-76, 1999.
- [42] P. Diaconis and L. Saloff-Coste, "What do we know about the Metropolis Algorithm?," *Journal of Computer and System Science*, 57, pp. 20-36, 1998.
- [43] P. Diaconis and D. Stroock, "Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains," *Annals of Applied Probability*, 1, pp. 36-61, 1991.
- [44] F. Diener, M. Diener, "Asymptotics of the price oscillations of a vanilla option in a tree model," *Finance and Stochastics*, 2004.
- [45] P. Erdős, "On a family of symmetric Bernoulli convolutions," *American Journal of Mathematics*, 61, pp. 974-976, 1939.
- [46] A.M. Garsia, "Arithmetic properties of Bernoulli convolutions," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102, pp. 409-432, 1962.
- [47] B. Hajek, "Cooling schedules for optimal annealing," *Math. Oper. Res.*, 13, no 2, pp. 311-329, 1982.
- [48] M. Harrison, D. Kreps, "Martingales and Arbitrages in Multiperiod Securities Market," *Journal of Economic Theory*, 29, pp.381-408, 1979.
- [49] B. Jessen, A. Wintner, "Distribution functions and the Riemann zeta function," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38, pp. 48-88, 1935.
- [50] R. Kershner, A. Wintner, "On symmetric Bernoulli convolutions," *Amer. J. Math.*, 57, pp. 541-548, 1935.
- [51] D. Lamberton, G. Pagès, P. Tarrès, "When can the two armed-bandit algorithm be trusted?," *Ann. Appl. Probab.*, 14, 3, pp. 1424-1454, 2004.

- [52] Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, "Sixty years of Bernoulli convolutions," in *Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998)*, 46, 39-65, Progr. Probab., Birkhauser, Basel, 2000.
- [53] Y. Peres, B. Solomyak, "Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof," *Math. Res. Lett.*, 3, no 2, pp. 231-239, 1996.
- [54] J.G. Propp, D.B. Wilson, "Exact sampling with coupled Markov chains and application to statistical mechanics," *Random structures and algorithms*, 9, pp. 223-252, 1996.
- [55] B. Solomyak, "On the random series $\sum_n +/ - \lambda^n$ (an Erdős problem)," *Annals of Math.*, 142, pp. 611-625, 1995.
- [56] A. Wintner, "On convergent Poisson convolutions," *Amer. J. Math.*, 57, pp. 827-838, 1935.

Index

- événement, 261
- équation différentielle, 172

- apériodique, 62, 68
- application mesurable, 263
- apprentissage, 181
- approximation stochastique, 169
- arbitrage, 220, 223
- arrêt optimal, 210
 - horizon fini, 212
 - horizon infini, 216
- autosimilarité, 29

- Bachelier, 252
- bandit à deux bras, 170, 180
- Bernoulli (convolution de), 25
- bistochastique (chaîne), 50
- Black et Scholes
 - formule, 242
- Borel-Cantelli (lemme de), 271
- brownien
 - mouvement, 252

- Cantor (ensemble de), 33, 34
- Cauchy
 - problème de, 205
- chaîne de Markov, voir Markov, A.
 - irréductible, voir irréductible
 - réversible, voir réversible
- chaîne de vie et de mort, 87, 204
- changement de variable (formule de), 282
- Chapman-Kolmogorov (équation de), 46
- chi-deux (distance du), 115
- coloriage (algorithme de), 98
- continuité (sous le signe f), 279
- convergence
 - étroite, 295
 - dans \mathbb{L}^p , 289
 - en loi, 295
 - en probabilité, 289
 - presque sûre, 289
- convergence dominée (théorème de), 277
- convergence monotone (théorème de), 274
- couverture, 220
- cut-off, 21

- dérivabilité (sous le signe f), 279
- Diaconis, P., 20
- Dirichlet
 - forme de, 57, 113
 - problème de, 206, 208
- Doob, J., 123
 - inégalité de, 136, 149
 - théorème de, 142

- Ehrenfest (urne d'), 43, 49, 50, 55, 61, 70
- entropie, 70, 71, 101
 - de Kullback, 71, 101
 - et théorème ergodique, 72
- enveloppe de Snell, 213
- Erdős, P., 33, 36
 - problème d', 37
 - théorème d', 36
- escalier du diable, 34
- espérance conditionnelle, 126
- espace fondamental, 261
- espace mesuré, 269
- espace probabilisé, 269

- filtration, 130, 131
 - naturelle, 131
- fonction caractéristique, 302
- fonction de Lyapounov, 178
- fractal, 33, 37, 40

- Fubini (théorème de), 282, 283
- gain, 187–189, 192, 213
- Gibbs (loi de), 99
simulation, voir Métropolis, Propp et Wilson
- graphe
d'une chaîne de Markov, 55
de Cayley, 74
- harmonique (sur, sous), 133, 199, 200, 206
- inégalité maximale, voir Doob
- inégalité
de Chebyshev, 284
de Jensen, 284
de Markov, 284
- inégalité de Jensen, voir Jensen
- intégration, 274
- irréductible (chaîne, noyau), 55, 57, 61
fortement, 62
- Ising (modèle d'), 99
simulation, voir Métropolis
- Jensen
inégalité de), 135
- Jessen, B., 33, 34
- Kershner, R., 33, 34
- Lévy, P
théorème de, 303
- Lévy, P., 123
- loi
continue, 33
d'une variable aléatoire, 269
discrète, 33
singulière, 33
- loi des grands nombres
pour des martingales, 139
pour des v.a. i.i.d. positives, 58
- loi des types purs, 33
- loi image, voir mesure image
- méthode de l'EDO, 172
- marche aléatoire
réfléchie, 81
sur \mathbb{Z} , 21, 49, 80, 150
sur \mathbb{Z}^d , 21, 43, 83
sur l'arbre homogène, 82
sur les graphes, 73
sur les groupes, 74
- Markov, A., 15
chaîne de, 15, 41, 94, 133
finie, 54
loi d'une, 51
Markov fort, 198
martingale, 198
propriété de, 41, 53
propriété de, 197
- martingale, 123, 132, 189, 191, 192, 241
chaîne de Markov, 198
convergence \mathbb{L}^2 , 138
convergence p.s, 151
convergence p.s., 138, 142
jeu de la roulette, 196
sous, 132, 189, 191
sur, 132, 189, 191
uniformément intégrable, 144
- matrice de transition, 41, 42
irréductible, voir irréductible
réversible, voir réversible
- matrice stochastique, voir matrice de transition
- mesure, 269
- mesure de Lebesgue, 274
- mesure image, 272
théorème de la, 280
- mesure produit, 274
- Métropolis (algorithme), 96, 97
pour le modèle d'Ising, 100
pour les lois de Gibbs, 99
vitesse de convergence, 117
- monotone (application, système), 109
- Monte-Carlo (méthode de), 95, 106
- noyau de transition, 90–92
fellerien, 147
irréductible, voir irréductible
réversible, voir réversible
- option, 228, 242
américaine, 245, 247

- d'achat, Call, 230, 231
- de vente, Put, 231
- européenne, 241
- période
 - d'un état, 68
 - d'un noyau irréductible, 68
- Pisot (nombre de), 33, 36
- Poincaré (inégalité de), 116
- Polya, G., 24
 - constante de, 24
 - marche de, voir marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d
 - théorème de, 24, 83
 - urne de, 138, 164, 170, 177
- portefeuille, 247
- potentiel, 199
- probabilité invariante, 48
 - pour l'urne d'Ehrenfest, 49, 50
 - pour les chaînes dénombrables, 49, 85
 - pour les chaînes finies, 54, 57, 85
- probabilité réversible, voir réversible
- probabilité, 269
 - théorème d'existence, 273
 - théorème d'unicité, 272
- processus, 130
 - adapté, 131
 - prévisible, 131
- processus de branchement, 153
 - cas critique, 157
 - cas sous-critique, 157
 - cas sur-critique, 157
- Prohorov (théorème de), 300
- Propp et Wilson (algorithme de), 65, 106
 - pour les lois de Gibbs, 109
 - pour les systèmes monotones, 109
- quatre couleurs (problème des), 98
- réurrence, 72, 75
 - classe de, 57
 - critère de, 77
 - d'un état, 76, 77
 - d'un noyau, 79
 - d'une marche aléatoire, 24, 80, 83
 - ensemble, 202
 - nulle, 72, 76
 - positive, 76, 85
 - d'une chaîne finie, 79
- réseaux de neurones, 181
- réversible, 49, 50, 97
 - spectre, 110
 - vitesse de convergence, 111
- recuit simulé, 101–103
 - convergence du, 119
- Riemann-Lebesgue (lemme de), 36
- risque-neutre
 - probabilité, 241
- Robbins-Monro, 171
- roulette (jeu de la), 185
- ruine du joueur, 192
- simulation
 - d'une chaîne de Markov, 95
 - d'une suite de v.a., 93
 - d'une v.a., 92
 - exacte, voir Propp et Wilson
- sphères dures (modèle des), 97
- Stirling (formule de), 61, 83
- stratégie, 185, 189, 190, 196
- support d'une probabilité, 32
- système dynamique aléatoire, 18, 45
 - loi d'un, 93
 - monotone, 109
 - noyau d'un, 42, 91, 92, 94, 107
- temps d'arrêt, 185, 189
 - arrêt optimal, 210
 - temps d'entrée, 190
 - tribu, 191
- théorème ergodique
 - pour les chaînes dénombrables, 89, 90
 - pour les chaînes finies, 63
 - pour les contractions affines, 38
 - pour les convolutions de Bernoulli, 26
- théorème ergodique presque sûr
 - pour les chaînes dénombrables, 85
 - pour les chaînes fellériennes, 148
 - pour les chaînes finies, 58
 - pour les contractions affines, 38
 - pour les convolutions de Bernoulli, 26
 - pour les v.a. i.i.d, voir loi des grands nombres

- théorème d'arrêt, 191, 192
- transformée de Fourier, voir fonction caractéristique
- transience, 72, 75
 - d'un état, 76, 77
 - d'un ensemble, 202
 - d'un noyau, 79
 - d'une marche aléatoire, 24, 83
- transport (théorème du), 280
- tribu, 261
 - borélienne, 262
 - engendrée, 262
 - produit, 263
- trou spectral, 114, 117

- variable aléatoire, 261, 263
- variation (distance en), 115
- voyageur de commerce, 103

- Wintner, A., 33–35

- zéro-un (loi du), 146

Dans la même collection

Chimie moléculaire des éléments de transition - F. Mathey et A. Sevin
300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

Les orbitales moléculaires dans les complexes - avec Exercices et Corrigés - Y. Jean
350 pages - ISBN 2-7302-1024-5

Cours d'analyse - J.-M. Bony
272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

Calcul différentiel et intégral - F. Laudenbach
220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - J.-M. Bony
217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

Les théorèmes de Noether - Y. Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de L. Meersseman
180 pages - ISBN 2-7302-1138-1 (2^e édition)

Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations - Y. Kosmann-Schwarzbach
198 pages - ISBN 2-7302-1257-4 (2^e édition)

Algèbre corporelle - A. Chambert-Loir
200 pages - ISBN 2-7302-1217-5

Une exploration des signaux en ondelettes - S. Mallat
654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

Dynamique de l'atmosphère et de l'océan - P. Bougeault et R. Sadourny
312 pages - ISBN 2-7302-0825-9

Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes - A. Sellier
175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

Mécanique des milieux continus - J. Salençon
Tome 1 - Concepts généraux - 376 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8 (avec CD-Rom)
Tome 2 - Thermoélasticité - 320 pages - ISBN 2-7302-0961-1
Tome 3 - Milieux curvilignes - 154 pages - ISBN 2-7302-0962-X

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture - J. Salençon
(accompagné d'un CD-Rom réalisé par J. Salençon)
266 pages - ISBN 2-7302-0915-8

Fluides et Solides - E. de Langre
130 pages - ISBN 2-7302-0833-X

Ondes acoustiques - A. Chaigne
224 pages - ISBN 2-7302-0840-2

Stabilité des matériaux et des structures - C. Stolz
206 pages - ISBN 2-7302-1076-8

Instabilités, Chaos et Turbulence - P. Manneville
360 pages - ISBN 2-7302-0913-1

Vibrations des structures couplées avec le vent - P. Hémon
144 pages - ISBN 2-7302-1332-5

Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis - M. Bonnet et A. Frangi
316 pages - 2-7302-1349-X

Énergie nucléaire - J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro
340 pages - ISBN 2-7302-0901-8

Mécanique quantique - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
(accompagné d'un CD-Rom de M. Joffre) 520 pages - ISBN 2-7302-0914-X

Problèmes quantiques - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
214 pages - ISBN 2-7302-1117-9

Principes de la cosmologie - J. Rich, adaptation française J.-L. Basdevant
400 pages - ISBN 2-7302-0925-5

Introduction à la relativité - A. Rougé
188 pages - ISBN 2-7302-0940-9

Introduction à la physique subatomique - A. Rougé
448 pages - ISBN 2-7302-1231-0

Physique statistique et illustrations en physique du solide. - C. Hermann
292 pages - ISBN 2-7302-1022-9

Bases physiques de la plasticité des solides - J.-C. Tolédano
264 pages - ISBN 978-2-7302-1378-3

Physique des électrons dans les solides. Structure de bandes, Supraconductivité et Magnétisme. H. Alloul
Tome 1 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1411-7

Physique des électrons dans les solides. Recueil d'exercices et de problèmes. H. Alloul
Tome 2 - 272 pages - ISBN 978-2-7302-1412-4

Introduction à la microéconomie - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8

Introduction à l'analyse macroéconomique - P.-A. Muet
208 pages - ISBN 2-7302-1140-3

Économie de l'entreprise - J.-P. Ponsard, D. Sevy, H. Tanguy
304 pages - ISBN 2-7302-1244-2

Groupes finis - XUPS 2000 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

Pavages - XUPS 2001 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

La fonction zêta - XUPS 2002 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
206 pages - ISBN 2-7302-1011-3

Distributions - XUPS2003 - dans le sillage de Laurent Schwartz - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 106 pages - ISBN 2-7302-1095-4

Graphes- XUPS 2004 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
84 pages - ISBN 2-7302-1182-9

Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes - XUPS2005 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 200 pages - ISBN 2-7302-1293-0

Théorie des jeux. Introduction à la théorie des jeux répétés - XUPS 2006 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1366-0

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1971 à 1992

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1993 à 2001

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2000-2001

400 pages - ISBN 2-7302-0834-8

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2001-2002

364 pages - ISBN 2-7302-0930-1

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2002-2003

390 pages - ISBN 2-7302-1041-5

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2003-2004

404 pages - ISBN 2-7302-1183-7

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2004-2005

404 pages - ISBN 2-7302-1221-3

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2005-2006

366 pages - ISBN 2-7302-1335-X

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2006-2007

444 pages - ISBN 978-2-7302-1414-8

Bioinformatique. Génomique et post-génomique - F. Dardel et F. Képès
250 pages - ISBN 2-7302-0927-1

Promenade aléatoire - M. Benaïm et N. El Karoui
316 pages - ISBN 2-7302-1168-3

Analyse numérique et optimisation - G. Allaire
480 pages - ISBN 2-7302-1255-8

Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz - F. Dubois, B. Després
208 pages - ISBN 2-7302-1253-1

Commande et optimisation de systèmes dynamiques - F. Bonnans et P. Rouchon
286 pages - ISBN 2-7302-1251-5

Introduction à la théorie des langages de programmation - G. Dowek, J.-J. Lévy
112 pages - ISBN 2-7302-1333-3

