Université de Rennes — L3 Mathématiques
Probabilités & Martingales — année 2023-2024

TP3 – Convergence des martingales

On rappelle que pour exploiter tout le potentiel de Python dans un contexte mathématique, il est nécessaire d'installer ou d'importer un certain nombre de modules à chaque session. Pour cette séance, on pourra par exemple charger les modules suivants :

```
import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy.random as rd
from random import *
from scipy.stats import *
```

Exercice 1. *Série aléatoire*
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer et illustrer numériquement le fait que lorsque $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $\sum_{i\geq 1} \alpha_i^2 < \infty$, la série $\sum_{i\geq 1} \alpha_i X_i$ converge presque sûrement.
2. Lorsque que les variables (X_i) sont des gaussiennes standard, que peut-on dire de la somme $\sum_{i\geq 1} \alpha_i X_i$? Lorsque la série converge, superposer un histogramme empirique avec ladensité de la loi limite théorique.

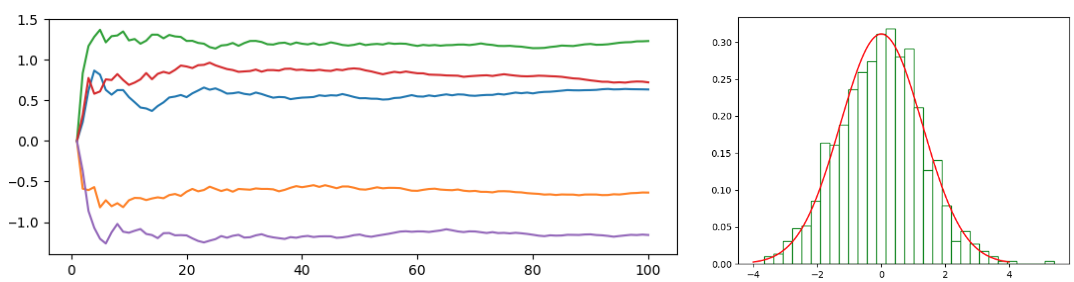

Figure 1 – À gauche : exemples de trajectoires $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i X_i$. À droite : histogramme empirique et densité théorique associée dans le cas gaussien avec $\alpha_i = 1/i$.

Exercice 2. *Martingales de carré intégrable*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Discuter la convergence des martingales suivantes :

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{i}, \qquad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{\sqrt{i}}.$$

Illustrer ces résultats numériquement.

Exercice 3. *Un exemple de martingale qui converge p.s. vers* $+\infty$
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $S_n := X_2 + ... + X_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 2}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geq 2}$ et qu'elle converge p.s. vers $+\infty$. Illustrer ce résultat numériquement.

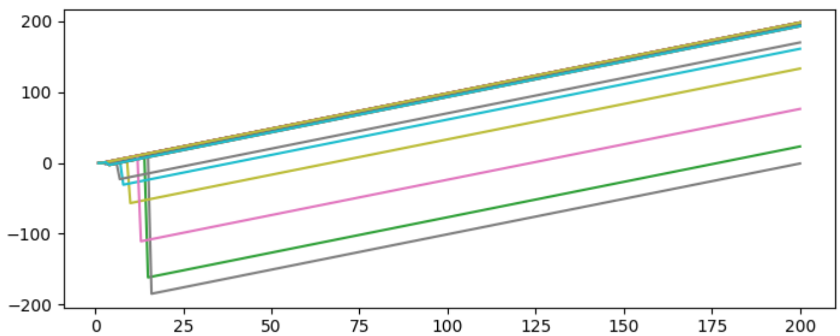

FIGURE 2 – Exemples de trajectoires de la suite S_n divergeant vers l'infini p.s.

Exercice 4. *Martingale et suite récurrente*
Soient a un réel et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1} + (1 - U_{n+1})X_n^2$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose maintenant que $a \in [0,1]$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable X_∞ que l'on précisera. Illustrer ce résultat numériquement.

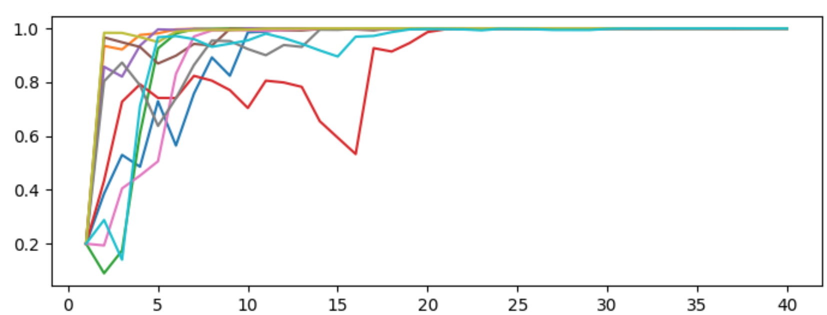

FIGURE 3 – Exemples de trajectoires de la suite X_n issues de $a = 1/5$.

Exercice 5. *Concentration sur 0 et 1*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$, $n \geq 0$. On suppose que $X_0 = a$ presque sûrement avec $a \in [0,1]$ et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire que l'on note X_∞. Illustrer numériquement cette convergence presque sûre.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ puis la loi de X_∞. Par la méthode de Monte Carlo, confirmer numériquement ces résultats théoriques.

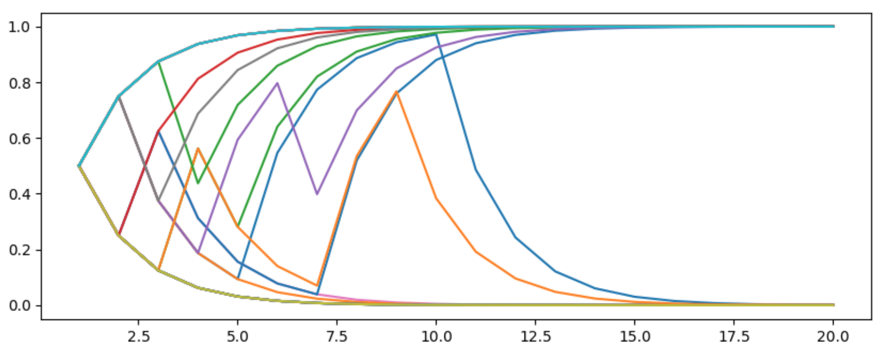

Figure 4 – Exemples de trajectoires issues de 1/2.

Exercice 6. *Série aléatoire bis*
On se place dans le même cadre que dans l'exercice 1, i.e. on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels.

1. Calculer le crochet (ou compensateur) de $S_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$.
2. Dans le cas où $\sum_i \alpha_i^2 = +\infty$, illustrer la loi des grands nombres et le théorème limite central pour les martingales.