Feuille 8 : Révision

Exercice 1 (Estimation, intervalles de confiance)
On considère $n = 1000$ variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, avec $0 < \theta < 12$ inconnu.

1. *Expliciter la moyenne et la variance des X_i.*
2. *Donner un estimateur de θ, sans biais et consistant, basé sur la méthode des moments.*
3. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisembance de θ.*
4. *Via le TLC, donner un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau 95%.*
5. *Via l'inégalité de Tchebychev, donner un intervalle confiance par excès pour θ au niveau 90%.*

Exercice 2 (Estimation, intervalles de confiance, bis)
On considère $n = 1000$ variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $0 < \theta < 1$ inconnu.

1. *Expliciter la moyenne et la variance des X_i.*
2. *Donner un estimateur $\widetilde{\theta}_n$ de θ, sans biais et consistant, basé sur la méthode des moments.*
3. *Via le TLC, donner un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau 95%.*
4. *Via l'inégalité de Hoeffding, donner un intervalle de confiance par excès pour θ au niveau 90%.*
5. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisembance $\widehat{\theta}_n$ de θ.*
6. *Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on a $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_n > \theta(1-\varepsilon)) = 1 - (1-\varepsilon)^n$.*
7. *En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau $1-\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$.*

Exercice 3 (Régression linéaire gaussienne)
On considère un modèle de régression linéaire de la forme $y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$ où les errreurs sont supposées i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On observe 100 données (x_i) et (y_i) telles que $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 10$, $var(x) = 2$, $var(x) = 3$, $cov(x, y) = 3$.

1. *Déterminer la droite de régression de y sur x de la forme $y = \hat{a}x + \hat{b}$.*
2. *Calculer le coefficient d'ajustement de la régression.*
3. *On note $\hat{y}_i$ le point de la droite de régression tel que $\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$ et on définit le résidu $\hat{\varepsilon}_i := y_i - \hat{y}_i$. Montrer que $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$ est un estimateur sans biais de σ.*
4. *Expliciter la vraisemblance et la log-vraisemblance du modèle en fonction de a, b, σ^2.*
5. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.*