Feuille 6 : intervalle de confiance

Exercice 1 (Accidentologie)
Dans une ville, on recueille pendant cinquante jours le nombres d'accidents de la circulation quotidiens. Les données obtenues sont les suivantes.

Nbre accidents	0	1	2	3	4
Nbre jours	21	18	7	3	1

On suppose que le nombre d'accidents par jour est bien décrit par une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. *Donner un intervalle de confiance de niveau* $0,95$ *pour le nombre moyen d'accidents par jour (on pourra utiliser une approximation de la loi de Poisson).*

Exercice 2 (Vélo électrique)
Un sondage auprès de 1500 *ménages tirés au hasard dans la population française a indiqué que 20 % de ceux-ci prévoient d'acheter un vélo électrique dans les douze prochains mois. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance* 95% *pour le pourcentage de ménages de la population française prévoyant d'acheter un vélo électrique dans les douze prochains mois.*

Exercice 3 (Fiabilité)
Une entreprise reçoit une livraison de 10000 *pièces d'une même marchandise. Pour évaluer le nombre de pièces défectueuses dans le stock livré, on tire au hasard* 400 *pièces dont on constate que* 45 *sont défectueuses. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance* 99% *pour le nombre total de pièces défectueuses parmi les* 10000.

Exercice 4 (Fiabilité, bis)
Un magasin de bricolage reçoit une importante commande de vis. Pour estimer la proportion de vis défectueuses livrées, on effectue n *fois le test suivant : on tire avec remise des vis au hasard jusqu'à en trouver une défectueuse et on notealors le nombre de tirages nécessaires. On fixe pour la suite* $\alpha \in]0,1[$.

1. *Déterminer le modèle statistique associé à cette expérience.*
2. *Construire un estimateur de la proportion de vis défectueuses.*
3. *Expliciter un intervalle de confiance asymptotique au niveau* $(1-\alpha)$ *pour la proportion de vis défectueuses.*
4. *Donner un estimateur sans biais du nombre moyen de tirages effectués lors des* n *tests.*
5. *Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau* $(1-\alpha)$ *pour ce nombre.*

Exercice 5 (Sur la loi exponentielle)
On considère $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *un échantillon de variables i.i.d. de loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$ *est inconnu. On fixe* $\alpha \in]0,1[$

1. *Montrer que la variable aléatoire* $\lambda \max_{1\leq i\leq n} X_i$ *est pivotale, i.e. sa loi ne dépend pas de* λ. *En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre* λ *au niveau de confiance* $1-\alpha$.
2. *Quelle est la loi* $\bar{X}_n$ *? En déduire un autre un intervalle de confiance pour* λ *au niveau* $1-\alpha$.
3. *Si* $\hat{\lambda} := 1/\bar{X}_n$, *déterminer le comportement asymptotique de* $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)$ *lorsque* n *tend vers l'infini et en déduire un intervalle de confiance asymptotique pour* λ *au niveau* $1-\alpha$.

Exercice 6 (Contrôle de taux)
Lors d'un contrôle sanitaire, on relève les taux de pesticides présents sur des plants de salade. L'étude s'effectue sur $n = 12$ plants. Les taux relevés sont les suivants.

$$0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 0.3 \quad 2.3 \quad 1.1 \quad 0.9 \quad 1 \quad 1.1 \quad 1.3 \quad 2 \quad 1.5$$

On suppose que ces 12 observations sont indépendantes et suivent une loi normale $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$.

1. *Donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne ν au niveau de confiance 95% en supposant que $\sigma^2 = 16$.*
2. *On suppose maintenant que la variance σ^2 est inconnue. Déterminer un nouvel intervalle de confiance à 95% pour la moyenne ν.*
3. *Donner un intervalle de confiance pour la variance au niveau 95%. L'hypothèse que $\sigma^2 = 16$ dans la première question est-elle raisonnable ?*

Exercice 7 (Estimateur des moments)
On cosidère le modèle statistique $\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \big(Q_\theta^{\otimes n}\big)_{\theta \in]-1,1[}\Big)$ où Q_θ désigne la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_\theta(x) := \frac{1}{2}(1 + \theta x)\mathbb{1}_{]-1,1[}(x).$$

1. *Construire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ en utilisant la méthode des moments.*
2. *Calculer son biais et son risque quadratique moyen.*
3. *Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer le comportement asymptotique de $\hat{\theta}$ lorsque n tend vers l'infini et en déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.*

Exercice 8 (Positionnement et médiane empirique)
On considère $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables i.i.d. dont la densité est de la forme $f_\theta(x) = f(x - \theta)$ où f est une fonction paire. On note M_n la médiane empirique associée, autrement dit si on considère les données ordonnées $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$, on a

$$M_n := X_{(k+1)}, \quad si \;\; n = 2k+1, \quad et \quad M_n := \frac{1}{2}(X_{(k)} + X_{(k+1)}), \quad si \;\; n = 2k.$$

1. *Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de la médiane empirique M_n.*
2. *Montrer que sa loi est également symétrique par rapport à θ.*
3. *En déduire que la médiane empirique est un estimateur sans biais pour θ.*