Feuille 5 : estimateurs

Exercice 1 (Maximum de vraisemblance)
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance (s'il existe et s'il est bien défini) et étudier ses propriétés asymptotiques dans les cas suivants :

1. *On observe* $(X_1, \ldots, X_n)$ *des variables i.i.d. de loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$*, où* $\lambda > 0$ *est inconnu.*
2. *On observe* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *de loi binomiale où* $p \in]0,1[$ *est inconnu et* n *est supposé connu.*
3. *On observe* $(X_1, \ldots, X_n)$ *des variables i.i.d. de loi uniforme sur* $[0,\theta]$*, où* $\theta > 0$ *est inconnu.*

Exercice 2 (Bernoulli)
On considère l'expérience statistique $\Upsilon = (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \{\frac{1}{10}, \frac{8}{10}\}})$*, où*

$$\mathbb{P}_\theta(X=0) = \theta \ \text{ et } \mathbb{P}_\theta(X=1) = 1-\theta.$$

Montrer que le modèle est identifiable, calculer une version de sa fonction de vraisemblance. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 (Modèle linéaire)
Soit $g : [0,1] \to]0,\infty[$ *une densité continue connue. Pour* $n \geq 1$*, on observe le vecteur* $(Y_1, ..., Y_n)$ *défini par*

$$Y_i := \theta + \frac{1}{\sqrt{g(i/n)}}\epsilon_i, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

où θ *est inconnu et où les variables* $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ *sont i.i.d. de loi* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ *avec* σ^2 *paramètre connu.*

1. *Écrire le modèle statistique correspondant. Montrer qu'il est identifiable.*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}$ *de* θ*.*
3. *Calculer* $\mathbb{E}\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right]$*.*

Exercice 4 (Loi gamma)
On observe $(X_1, \ldots, X_n)$ *des variables i.i.d. de loi Gamma* $\Gamma(k, \frac{1}{\theta})$ *où* $\theta \in \mathbb{R}_+$ *est inconnu et l'entier* $k \geq 1$ *est connu. On rappelle que la densité commune des* X_i *est alors donnée par* $f_\theta(x) := \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$*.*

1. *Écrire le modèle statistique correspondant.*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}$ *de* θ*.*
3. *Calculer l'espérance et la variance de* $\hat{\theta}$*. Que peut-on conclure ?*
4. *On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher et en déduire que* $\hat{\theta}$ *est efficace.*

Exercice 5 (Loi Gamma, bis)
On observe $(X_1, \ldots, X_n)$ *des variables i.i.d. de loi de densité* $f_\theta(x) := \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$*, où* $\theta > 0$ *est inconnu.*

1. *Calculer l'espérance de* X_1 *et en déduire un estimateur* $\widetilde{\theta}$ *de* θ *par la méthode des moments.*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}$ *de* θ*.*
3. *Étudier le biais et le risque quadratique de* $\hat{\theta}$*.*
4. *Déterminer la loi limite de* $\hat{\theta}$*.*

Exercice 6 (Loi de Poisson)
On observe un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu.

1. *Expliciter le modèle statistique correspondant. Est-il identifiable ?*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.*
3. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de $\hat{\theta}$. Que peut-on conclure ?*
4. *On suppose que le modèle vérifie les hypothèses afin de pouvoir appliquer les résultats sur l'information de Fisher. Calculer la quantité d'information de Fisher et en déduire que $\hat{\theta}$ est efficace.*

Exercice 7 (Comparaison d'estimateurs)
On observe $(X_1, \dots, X_n)$ des variables i.i.d. de loi de densité $f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} \mathbb{1}_{]0,\theta]}(x)$ où le paramètre $\theta > 0$ est inconnu.

1. *Écrire le modèle sous la forme d'un triplet, espace d'observation, tribu, famille de probabilités. Ce modèle est-il identifiable ?*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_0$ de θ.*
3. *Soit $\hat{\theta}_1 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Quelle est la loi de $\hat{\theta}_1$?*
4. *Déterminer le biais de l'estimateur $\hat{\theta}_1$. Que pouvez vous en déduire ?*
5. *Calculer l'espérance de X_1 et en déduire un estimateur des moments de θ, noté $\hat{\theta}_2$.*
6. *Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_1$? On pourra penser à étudier $Z_n = n(\hat{\theta}_1 - \theta)$.*
7. *Quelle est la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_2$?*
8. *Question de cours (aucun calcul n'est demandé) : sur quel(s) critère(s) pourriez vous comparer $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ afin de savoir lequel est le plus pertinent ?*

Exercice 8 (Modèle linéaire et maximum de vraisemblance)
On observe un vecteur aléatoire $(Y_1, \dots, Y_n)$ et on suppose que pour $1 \leq i \leq n$, les variables Y_i sont de la forme $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ où β est inconnu, où les $x_1, ..., x_n$ sont des constantes fixés et connues et $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec σ^2 paramètre inconnu.

1. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}_1$ de β et montrer qu'il est non biaisé.*
2. *Quelle est la loi de $\hat{\beta}_1$?*
3. *Montrer que $\hat{\beta}_2 := \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ est également un estimateur non biaisé de β.*
4. *Déterminer la variance de $\hat{\beta}_2$. Quel estimateur préférez-vous entre $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$?*
5. *Montrer que $\hat{\beta}_3 := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}}{n}$ est un nouvel estimateur non biaisé de β.*
6. *Calculer la variance de $\hat{\beta}_3$.*
7. *Quel estimateur préférez vous entre les 3 précédents ?*

Exercice 9 (Capture et recapture)
On souhaite estimer le nombre de poissons dans un étang. On note N ce nombre inconnu. Au cours d'une première session de pêche (avec remise à l'eau), on marque M poissons. Au cours d'une seconde session, on pêche alors sans remise un nombre X (aléatoire) de poissons, jusqu'à obtenir un poisson marqué.

1. *Quelle est la loi de X*
2. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{N}$ de N associé à une observation x de X.*
3. *Application : que vaut $\hat{N}$ lorsque $M = 100$ et $x = 3$?*