Feuille 3 : probabilités et théorèmes limites

Exercice 1 (Arrondi)
Un programme de calcul est configuré de sorte à tronquer les nombres à N chiffres significatifs après la virgule et ainsi d'arrondir tous les résultat à $\frac{1}{2}10^{-N}$ près. On suppose qu'il effectue n opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}10^{-N}, \frac{1}{2}10^{-N}]$. On suppose de plus que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Expliciter une valeur approchée de la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale à α (en valeur absolue), en fonction de α, n, N et de la fonction de répartition Φ de la gaussienne standard. Particulariser au cas où $\alpha = 1/\sqrt{12}$ et $n = 10^{2N}$.

Exercice 2 (Théorème limite fondamentaux)

1. *Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-dire de la suite*
$$\frac{f(U_1) + ... + f(U_n)}{n}$$
lorsque n tend vers $+\infty$?
2. *Calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$. Plus généralement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, montrer que l'on a*
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-t^2/2} dt.$$

Exercice 3 (Produit de variables uniformes)
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et soit $X_n := (\Pi_{j=1}^n U_j)^{1/n}$. Montrer que la suite X_n converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite.

Exercice 4 (LGN sans indépendance)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$. On note $S_n := \sum_{k=1}^n X_k X_{k+1}$. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement et expliciter sa limite.

Exercice 5 (Utilitaires)

1. *Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive dont l'espérance est nulle est nulle presque sûrement.*
2. *Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} |\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ est un ensemble au plus dénombrable.*
3. *Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre m mais pas de moment d'ordre $m + 1$.*

Exercice 6 (Modes de convergence)
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a. et une v.a. X.

1. *Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ n'entraine pas que $X_n - X \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$ sauf si X est p.s. constante.*
2. *Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ n'entraine pas que $X_n - X \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$, et en déduire que la convergence presque sûre n'implique pas la convergence dans L^1.*

Exercice 7 (Modes de convergence II)

1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités. Soient* $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'évènements sur cet espace et* $p \geq 1$ *un réel. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite* $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ *elle a lieu.*
   (a) *La suite* $(\mathbb{1}_{\mathcal{A}_n})_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers 0 ?*
   (b) *La suite* $(\mathbb{1}_{\mathcal{A}_n})_{n\geq 1}$ *converge dans* $\mathbb{L}^p$ *vers 0 ?*
   (c) *La suite* $(\mathbb{1}_{\mathcal{A}_n})_{n\geq 1}$ *converge presque sûrement vers 0 ?*
2. *Construire une suite de variables aléatoires intégrables* $(X_n)_{n\geq 1}$ *et une variable aléatoire intégrable* X *telles qu'on ait* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \neq \mathbb{E}(X)$.
3. *Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est soit une loi exponentielle soit une masse de Dirac en 0.*

Exercice 8 (Modes de convergence III)

On considère deux suites $(X_n)_{n\geq 0}$ *et* $(Y_n)_{n\geq 0}$ *de v.a. et une v.a.* X *telles que* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *et* $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$. *Montrer que*

1. $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *(On pourra penser à utiliser les fonctions caractéristiques).*
2. $X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Exercice 9 (Sur la loi de Cauchy)

On rappelle qu'une loi de Cauchy a pour densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ *par rapport à la mesure de Lebesgue.*

1. *Soit* U *une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Calculer la loi de* $\tan U$.
2. *Que vaut* $\mathbb{E}(\tan U)$ *?*
3. *Soit* $(X, X^{'})$ *une paire de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy. Déterminer la densité de la loi de* $X + X^{'}$.
4. *Soit* Y *une variable aléatoire réelle dont la loi est* $\frac{1}{2}e^{-|y|}dy$. *Calculer la fonction caractéristique de la loi de* Y *définie par*
$$\Psi_Y : \xi \mapsto \mathbb{E}[e^{i\xi Y}].$$
5. *Soit* $(X, X^{'})$ *deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Cauchy et* $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ *Calculer la densité de la loi de* $\lambda X + \nu X^{'}$, *et celle de* $XX^{'}$.
6. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi de Cauchy. Calculer la limite (en loi), quand* $n \to +\infty$, *de*
$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$