

2.3 Le problème des moments

Le problème des moments consiste à demander si, étant donnée des $\mathbb{E}[X^p]$ $\forall p \in \mathbb{N}$ permet

d'identifier P_X : précisément il y a deux questions associées :

- Existence : étant donnée une suite $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$, existe-t-il une variable aléatoire X de loi P_X telle que
$$\mathbb{E}[X^p] = \int x^p P_X(dx) = m_p \quad \forall p \geq 0 ?$$

- Unicité : si X et Y sont telles que $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^p] \quad \forall p \geq 0$
a-t-on $P_X = P_Y$?

Remarque : Si l'on travaille avec des mesures de proba on a toujours $m_0 = \mathbb{E}[X^0] = 1$.

En fait la réponse aux problèmes d'existence et d'unicité dépend du support de la loi cible.

Définition : Soit $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, on dit que $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est complètement monotone si :

$$\forall p \geq 0, q \geq 0 \quad (-1)^k (\Delta^k m)_p \geq 0$$

$$\text{où } (\Delta m)_p := m_{p+1} - m_p.$$

On a par exemple

$$(\Delta^2 m)_p = (m_{p+2} - m_{p+1}) - (m_{p+1} - m_p) = m_{p+2} - 2m_{p+1} + m_p$$

$$(\Delta^4 m)_6 = m_{10} - 4m_9 + 6m_8 - 4m_7 + m_6$$

Théorème : La suite $(m_p)_{p \geq 0}$ est la suite des moments d'une mesure μ supportée dans $[0,1]$ i.e. $m_p = \int_0^1 x^p \mu(dx)$ ssi (m_p) est complètement monotone.

[moments de Hausdorff]

Preuve : Le caractère nécessaire de la condition de complètement monotone est clair puisque qu'on note que

$$(-1)^k (\Delta^k m)_p = \int_0^1 x^p (1-x)^k \mu(dx)$$

On admet l'autre implication (voir DM explicitement)

Théorème : La suite (m_p) est la suite des moments d'une mesure μ à support infini dans $\mathbb{R}$ ssi la matrice infinie

$$A = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots \\ m_2 & m_3 & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ est définie positive}$$

i.e. $\forall$ suite $(a_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, nulle à partir d'un certain rang

$$\sum_{j,k \geq 0} m_{j+k} a_j \bar{a}_k > 0.$$

Preuve : la encore la condition est nécessaire puisque l'on

peut écrire
$$\sum_{j,k \geq 0} m_{j+k} a_j \bar{a}_k = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j \geq 0} a_j x^j \right|^2 \mu(dx)$$

On admet à nouveau l'autre implication, voir DM.

□

Pour la question inverse, on a le résultat suivant:

Proposition: Si μ est à support dans $[0,1]$ alors μ est caractérisée par ses moments $m_p = \int x^p \mu(dx)$.

Preuve: Soient μ et ν deux mesures partageant les mêmes moments ie $\int_0^1 x^p \mu(dx) = \int_0^1 x^p \nu(dx) \quad \forall p \geq 0$.

Alors par linéarité, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ on a alors $\int_0^1 Q(x) \mu(dx) = \int_0^1 Q(x) \nu(dx)$.

Soit maintenant une fonction continue f sur $[0,1]$.

Par le théorème de Stone-Weierstraß, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ tq $\|Q_\varepsilon - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \mu(dx) - \int f(x) \nu(dx) \right| &\leq \left| \int Q_\varepsilon(x) \mu(dx) - \int Q_\varepsilon(x) \nu(dx) \right| \\ &+ \underbrace{\left| \int (f - Q_\varepsilon)(x) d\mu(x) \right|}_{\leq \|f - Q_\varepsilon\|_\infty} + \underbrace{\left| \int (f - Q_\varepsilon)(x) d\nu(x) \right|}_{\leq \|f - Q_\varepsilon\|_\infty} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$|\dots| \leq \|f - Q_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$

Ainsi $\int f d\mu = \int f d\nu \quad \forall f \text{ continue et } \mu = \nu \quad \square$

Remarque: Pour μ n'est pas à support compact, il n'y a pas en général unicité, Cf contre exemple de l'exercice 7 du TD5.