Liste d'exercices pour les travaux dirigés

1 Rappels sur les tribus, classes monotones

Exercice 1.1. *Tribus images*
Soient X et Y des ensembles et f une application de X dans Y.

1. Montrer que si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Y, $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G),\ G \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X.
2. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu sur X, $\mathcal{G} := \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y.
3. Montrer que pour toute partie $\mathcal{C} \subset Y$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 1.2. *Classes monotones et tribus*

1. Une union de tribus est-elle une tribu ? Une union croissante de tribus est-elle une tribu ? Si non, donner un/des contre-exemples.
2. Montrer qu'une classe monotone $\mathcal{M}$ est une tribu si et seulement si c'est un $\pi-$système, i.e. ssi $\mathcal{M}$ est stable par intersection.

Exercice 1.3. *Cardinal d'une tribu*
Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit I'atome de la tribu $\mathcal{E}$ engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E},\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{E}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.

Exercice 1.4. *Anticipation sur la notion d'indépendance*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Plus généralement, on dit que deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ d'événements sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{G}$ et $B \in \mathcal{H}$, A et B sont indépendants.

1. Soit $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles stable par intersection finie et indépendante d'une tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, montrer que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ est encore indépendante de la tribu $\mathcal{G}$.
2. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des familles d'événements stables par intersection. Montrer que les deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont indépendantes si et seulement si les tribus $\sigma(\mathcal{G})$ et $\sigma(\mathcal{H})$ qu'elles engendrent sont indépendantes.
3. Montrer par un exemple que l'hypothèse de stabilité par intersection est nécessaire.

Exercice 1.5. *Version fonctionnelle du lemme de classes monotones*
Soit H un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble Ω et soit $\mathcal{E}$ un $\pi-$système contenant Ω. On suppose que

1. $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{1}_A \in H$,
2. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives de H convergeant vers une fonction f bornée, alors $f \in H$.

Montrer que H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{E})-$mesurables.

2 Probabilités élémentaires

Exercice 2.1. *Formule du crible*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Montrer que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille d'évènements, alors

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) = \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_3)-\mathbb{P}(A_2\cap A_3)+\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3),$$

et plus généralement

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{\#I-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right).$$

Exercice 2.2. *Convergence monotone pour les probabilités*
Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = \emptyset$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité, i.e. elle est $\sigma-$additive.
2. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
3. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
4. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 2.3. *Limites inférieure et supérieure*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et on note

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

1. Montrer que $\omega \in \liminf_n A_n$ ssi à partir d'un certain rang, ω est dans tous les A_n.
2. Montrer que $\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$.
4. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors elle est convergente et préciser la limite.
5. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a alors la propriété de continuité de la mesure $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 2.4. *Limites inférieure et supérieure, suite*
Décrire les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ dans les cas suivantes

1. $A_n =]-\infty, n]$;
2. $A_n =]-\infty, -n]$;
3. $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
4. $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 2.5. *Premier lemme de Borel–Cantelli*
On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements qui est telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 2.6. *Presque sûr*
On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est presque sûr si A est presque surement égal à Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$ avec N un ensemble négligeable, i.e. il existe $B \in \mathcal{F}$ avec $N \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit K un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_k)_{k\in K}$ une famille d'évènements presque sûrs. Montrer que $\bigcap_{k\in K} A_k$ est presque sûr.

Exercice 2.7. *Tribu complétée*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\overline{\mathcal{F}} := \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu et plus précisément $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles $\mathbb{P}-$négligeables, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$.
2. On définit une nouvelle mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mathbb{P}}(C) := \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\overline{\mathbb{P}}$ est bien définie, i.e. que sa valeur ne dépend par du choix des encadrants A_1 et A_2, et que $\overline{\mathbb{P}}$ est l'unique mesure sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ qui prolonge $\mathbb{P}$, i.e. qui coincide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$.
3. Montrer que pour toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\overline{\mathcal{F}}-$mesurable, il existe des fonctions $\mathcal{F}-$mesurables $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$, telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$, $\mathbb{P}-$presque sûrement.

Exercice 2.8. *Support d'une mesure*
Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On définit le support de la mesure μ comme l'ensemble

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n ; \mu(B(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S\backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S.

3 Variables aléatoires, indépendance

Exercice 3.1. *Mesurabilité et tribu triviale*
Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 3.2. *Limsup et liminf, le retour*
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de va. réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$

1. Comparer les ensembles $\{\limsup_n X_n > 1\}$, $\limsup_n \{X_n > 1\}$, $\{\limsup_n X_n \geq 1\}$ et $\limsup_n \{X_n \geq 1\}$.
2. Comparer les ensembles $\{\liminf_n X_n > 1\}$, $\liminf_n \{X_n > 1\}$, $\{\liminf_n X_n \geq 1\}$ et $\liminf_n \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 3.3. *Copies ordonnées*
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\mathbb{P}(Y \leq t < X) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.
2. On suppose maintenant que X et Y ont même loi. Montrer que si $X \leq Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

Exercice 3.4. *Min et max de variables indépendantes*
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par F leur fonction de répartition commune. Déterminer les fonctions de répartitions de $m = \min_{i=1\ldots n} X_i$ et $M = \max_{i=1\ldots n} X_i$.

Exercice 3.5. *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*
Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. X est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.6. *Sur les variables uniformes*
L'objet de l'exercice est de montrer que la loi uniforme n'est pas "divisible".

1. Montrer qu'il n'existe aucun vecteur $(a, b, c, d, \lambda) \in (0, +\infty)^5$ tel que
$$ab = \lambda, \quad cd = \lambda, \quad \text{et} \quad ac + bd \leq \lambda.$$
2. Soit $n \geq 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et chargeant tous les points dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, 2n\}$?

Exercice 3.7. *Entropie d'une variable discrète*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$, avec $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On définit l'entropie de X par
$$H(X) := -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$
avec la convention $x \ln x = 0$ si $x = 0$.

1. Démontrer que $H(X) \geq 0$.
2. Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque surement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p_i = 1$.
3. Vérifier que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a $(-np_k) \ln (np_k) \leq 1 - np_k$, avec égalité ssi $np_k = 1$.
4. En déduire que $H(X) \leq \ln n$.
5. Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équidistribuée, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 3.8. *Produit eulérien*
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n) := \frac{1}{n^s \zeta(s)}, \quad \text{avec } s > 1.$$

1. Pour $k \geq 1$, on désigne par E_k l'événement "k divise X". Montrer que

$$\mathbb{P}_X(E_k) = \frac{1}{k^s}.$$

2. Si $(p_i)_{i=1}^n$ sont des nombres premiers distincts, montrer que les événements E_{p_i} sont indépendants :

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(E_{p_i}\right).$$

3. En déduire la représentation en produit eulérien de la fonction Zeta

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Exercice 3.9. *Pile ou face*
On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée. On fixe un entier m arbitrairement grand. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtiendra une infinité de fois m piles consécutifs. Généraliser.

4 Lois des variables aléatoires, identification

Exercice 4.1. *Pesked ha farz*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{2}\frac{2^k}{k!} + a\,\frac{3^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

2. Exprimer X à l'aide de deux variables de Poisson indépendantes.

Exercice 4.2. *Une fonction de répartition*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut
$$F_X(t) = \left(1 + e^{-t}\right)^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
2. La variable X admet-elle une densité f_X ? Si oui, explicitez cette densité.
3. On définit de nouvelles variables en posant $U := e^X$, $V := \mathbb{1}_{\{0<X<\log(2)\}}$ et $W := X\mathbb{1}_{\{0<X<1\}}$. Déterminer les lois des variables U, V et W.

Exercice 4.3. *Densités et marginales*
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par
$$f_{X,Y}(x, y) = c\, y \mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c. Calculer les densités marginales f_X et f_Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Mêmes questions pour $f(x, y) = c\, y(x - y) \exp(-(x + y))\mathbb{1}_{0\leq y\leq x}$.

Exercice 4.4. *Couple de variables aléatoire*
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \mapsto c\, e^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Quelle est la loi du vecteur $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$?

Exercice 4.5. *Somme de variables indépendantes*

1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Déterminer la loi de $X+Y$. Interpréter ce résultat en terme de jeu de pile ou face.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, où $\lambda, \mu > 0$. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$ et $\Gamma(m, \lambda)$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Particulariser au cas où $n = 1$.

Exercice 4.6. *Extrema de lois usuelles*

1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ où $p, q \in]0, 1[$. Déterminer les lois de $X \vee Y = \max(X, Y)$ et $X \wedge Y = \min(X, Y)$.
2. Même question si X et Y sont des variables indépendantes de lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$, avec $\lambda, \mu > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
3. Soient $U_0, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et N une variable aléatoire indépendante des $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. Déterminer la loi de $Z := \min_{0\leq i\leq N} U_i$.

Exercice 4.7. *Propriété d'absence de mémoire*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0$$

et respectivement

$$\mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > \ell), \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.

Exercice 4.8. *Quelques transformations remarquables*

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Déterminer la loi de la variable $Y = 1/X$.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(U)$.
4. Soit ε une variable aléatoire de loi de Rademacher i.e $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$ et X une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de ε. Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$. Généraliser.

Exercice 4.9. *Fonctions test, lois Gamma et Beta*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Démontrer que la loi de $X_1 + \cdots + X_n$ est une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$.
2. Démontrer que $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ est indépendant de $X_1 + X_2$, et suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
3. Généraliser la question précédente en déterminant, pour $k = 1, \ldots, n - 1$, la densité loi de la variable aléatoire
$$\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n},$$
dite de loi Beta et notée $\beta(k, n - k)$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^{k-1}(1 - x)^{n-k-1}dx$.

Exercice 4.10. *Fonctions test, lois Gamma, le retour*
Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 ; on pose $S_k := X_1 + \cdots + X_k$ pour $k = 1, \ldots, n + 1$. Vérifier simultanément que le vecteur

$$\left(\frac{X_1}{S_{n+1}}, \frac{X_2}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{X_{n+1}}{S_{n+1}}\right)$$

est indépendant de S_{n+1} et que la loi du vecteur aléatoire

$$\left(\frac{X_1}{S_{n+1}}, \frac{X_2}{S_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{S_{n+1}}\right)$$

est uniforme sur le simplexe $\Delta = \{y \in]0, \infty[^n ; \sum_{k=1}^n y_k < 1\}$.

5 Conditionnement

Exercice 5.1. *Formule de Bayes*
Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice 5.2. *Conditionnement de variables discrètes*

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales, de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2 + \ldots + X_p$ puis la loi de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + X_2 + \ldots + X_p = n$.

Exercice 5.3. *Conditionnement par le maximum*
Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes, intégrables et de densité commune $f_X(x)$. On désigne par $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ sa permutation ordonnée, autrement dit $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ presque sûrement. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{(1)}$ sachant $X_{(n)} = x_n$. Particulariser au cas où les variables X_i sont uniformes sur $[0, 1]$.

Exercice 5.4. *Un calcul de loi et d'espérance conditionnelle*
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_{X,Y}(x, y) = 4y(x - y) \exp(-(x + y)) \mathbb{1}_{0 \leq y \leq x}(x, y).$$

Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ et en déduire $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$.

6 Moments des variables aléatoires

Exercice 6.1. *Partie entière et inverse d'une variable uniforme*
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et $X := \lfloor \frac{1}{U} \rfloor$ la partie entière de son inverse.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité de l'évenement $\{X \geq 100\}$.
3. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Exercice 6.2. *Quelques calculs explicites d'espérances*
Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[|X|]$, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[e^{itX}]$ dans les cas suivants :

1. $X \sim U_{[-1,1]}$ i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx$.
2. $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x \geq 0}dx$, pour $\lambda > 0$.
3. $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.3. *Moments de tout ordre*
Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c\left(x\mathbf{1}_{[0,1[}(x) + (2-x)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\right).$$

Déterminer c et calculer les moments $\mathbb{E}\left[X^n\right]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6.4. *Variable de Cauchy tronquée*
Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{E}[\min(|X|, n)]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Explicitez la limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6.5. *Moments de la gaussienne*
Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on note $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ son $k^{\text{ième}}$ moment.

1. Justifier que le moments impairs de X sont nuls.
2. Montrer que les moments pairs vérifient la formule de récurrence $m_{2k} = (2k-1)m_{2k-2}$ et conclure que $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
3. Interpréter m_{2k} en terme combinatoire.

Exercice 6.6. *Moment et queue d'une loi*
Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X.

1. Soit ϕ une fonction positive strictement croissante de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, nulle en 0. Montrer que
$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_0^{+\infty} \phi'(t)\,(1 - F_X(t))\,dt.$$
2. On suppose de plus que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que
$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t)\mathbb{P}(X > t) = 0.$$
3. Expliciter le cas particulier où $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On suppose maintenant que pour t assez grand, il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{c}{t^\alpha}.$$
Montrer que X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < \alpha$.

Exercice 6.7. *Contre-exemple au problème des moments sur* $\mathbb{R}^+$
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Déterminer tous les moments $\mathbb{E}\left[X^n\right]$, $n \geq 1$.
2. Déterminer la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer les moments $\mathbb{E}\left[Y^n\right]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On considère la famille de variables aléatoires $(Y_a, |a| \leq 1)$, dont les densités sont données par
$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)(1 + a\sin(2\pi\ln(x))), \quad x > 0.$$
Calculer les moments $\mathbb{E}\left[Y_a^n\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire une conclusion intéressante.

7 Fonctions caractéristiques

Exercice 7.1. *Fonctions caractéristiques et lois symétriques*
Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X. On dit que X est de loi symétrique si la loi de $-X$ est la même que celle de X, i.e. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple de loi symétrique.
2. Montrer que si X est de loi symétrique ssi φ_X est à valeurs réelles.
3. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X. Donner, en fonction de φ_X, la fonction caractéristique de $X - Y$.
4. Soit ε une variable indépendante de X et de loi de Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Donner, en fonction de φ, la fonction caractéristique de εX.
5. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0, 1]$. Montrer que $p\varphi + (1 - p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

Exercice 7.2. *Exemples de fonctions caractéristiques*

1. Montrer que la fonction $\phi(t) = \cos^n(t)$ est une fonction caractéristique d'une variable à expliciter.
2. Même question pour la fonction $\phi(t) = \exp(-|t|)\cos(2t)$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - |x|)\mathbf{1}_{|x|<1}$?
4. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - \cos(x))/\left(\pi x^2\right)$?

Exercice 7.3. *Loi arithmétique*
Une variable aléatoire X suit une loi arithmétique s'il existe $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que X prend ses valeurs dans le réseau $a + b\mathbb{Z}$ i.e.

$$\mathbb{P}(X \in \{a + nb, n \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

1. On suppose que X suit une loi arithmétique. Montrer qu'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$.
2. Réciproquement, s'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$, on montre que X suit une loi arithmétique.
   (a) Montrer que si $|\varphi_X(c)| = 1$ alors l'argument de e^{icX} est presque sûrement constant.
   (b) En déduire que X suit une loi arithmétique.
3. S'il existe $c \neq 0$ et $c' \neq 0$ tels que $|\varphi_X(c)| = |\varphi_X(c')| = 1$ avec $c'/c \notin \mathbb{Q}$, montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 7.4. *Dérivabilité en 0 et moment*
On considère une variable aléatoire X de support $\mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$ et de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n) = \frac{c}{n^2 \ln(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où c est une constante de normalisation qu'on ne cherchera pas à préciser.

1. Expliciter la fonction caractéristique φ_X de X et en déduire que pour $t \neq 0$

$$\frac{1-\varphi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-\cos(kt)}{k^2 \ln(k)}.$$

2. En distinguant selon que $2 \leq k < 1/t$ et $k \geq 1/t$, montrer que $\frac{1-\varphi_X(t)}{t}$ tend vers zéro lorsque t tend vers 0.
3. Formuler une remarque pertinente.

Exercice 7.5. *Stabilité de la loi par somme indépendante*
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose qu'elles possèdent un moment d'ordre 2 et on note σ^2 leur variance commune. On suppose de plus que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a même loi que X.

1. Démontrer que X est d'espérance nulle.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de la fonction caractéristique φ_X en zéro.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)^{2^n} = \varphi_X(t)$.
4. En déduire que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 7.6. *Caractérisation gaussienne*
On va montrer le théorème suivant attribué à Bernstein : si X et Y sont deux variables $\mathbb{L}^2$ indépendantes de même loi telle que $X-Y$ et $X+Y$ sont indépendantes, alors X et Y sont des variables gaussiennes.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables normales centrées réduites alors $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
2. Réciproquement, on suppose que X et Y sont deux variables de carré intégrable de même loi, on suppose de plus que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
   (a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées et de variance 1.
   (b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y satisfait l'égalité : $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t)$.
   (c) En utilisant la continuité de φ en 0 , en déduire que φ ne s'annule nulle part.
   (d) On pose $\psi(t) = \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$.
   (e) En étudiant le comportement de φ au voisinage de 0, en déduire que $\psi(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   (f) En déduire que $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Exercice 7.7. *Développement en série*

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1}\exp(ituX)\mathrm{d}u\right].$$

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t),$$

où $|\varepsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}\left[|X|^n\right]$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(t) = 0$

3. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$

où $\|X\|_n := \mathbb{E}\left[|X|^n\right]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est alors développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant supérieur ou égal à R/e. En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right[, \quad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Exercice 7.8. *Dérivée seconde d'une fonction caractéristique*
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. On désigne par φ_X sa fonction caractéristique. Montrer que

$$\frac{-1}{\mathbb{E}[X^2]} \frac{d^2}{dt^2} \varphi_X(t)$$

est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire que l'on explicitera.

8 Convergence des variables aléatoires

Exercice 8.1. *Longue marche aléatoire*
On considère une suite $(X_n)_{n>0}$ de variables aléatoires toutes indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. On définit alors $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 := 0$ et $S_{n+1} := S_n + X_{n+1}$ pour $n \geq 0$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique $\varphi_{S_n/\sqrt{n}}$ converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 8.2. *Loi des événements rares*
Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique φ_{X_n} converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 8.3. *Uniformes et uniforme*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite suite de variables aléatoires telles que X_n suit la loi uniforme dans $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que la suite des fonctions de répartition $F_{X_n/n}$ des variables X_n/n converge et expliciter sa limite. Même question pour la fonction caractéristique $\varphi_{X_n/n}$.

Exercice 8.4. *Convergence de variables exponentielles*
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta_n)$ où la suite de paramètres vérifie $\lim_{n\to+\infty}\theta_n = +\infty$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité et préciser sa limite.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle dans $\mathbb{L}^1$?
3. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ lorsque $\theta_n = n$ puis $\theta_n = \ln n$.

Exercice 8.5. *Convergence de variables aléatoires*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements sur cet espace et $p \geq 1$ un réel. Pour chacun des modes de convergence suivants, déterminer à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ la convergence a effectivement lieu.
   (a) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
   (b) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers 0.
   (c) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout réel $c > 0$, on a $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(|X_n| > c) < +\infty$.
3. Construire une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ et une variable aléatoire intégrable X telles qu'on ait $X_n \overset{loi}{\to} X$ et $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[X_n] \neq \mathbb{E}[X]$.
4. Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est soit exponentielle, soit la masse de Dirac en 0.
5. Soient $\alpha > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et dont la loi est donnée par
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$
Montrer que la suite (X_n) converge dans $\mathbb{L}^1$ et en probabilité. Converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 8.6. *Maximum de variables uniformes*
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n := \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n := n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 8.7. *Maximum d'exponentielles*
On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit alors la suite (Z_n) par
$$Z_n := \frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k.$$

1. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabiblité vers $1/\lambda$.
2. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 8.8. *Définition alternative de l'uniforme intégrabilité*
Montrer qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si et seulement si $(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathbb{L}^1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si A est un événement vérifiant $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ alors $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$.

Exercice 8.9. *Uniforme intégrabilité via une fonction test*

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrez qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^+ \to]0, +\infty[$ telle que

$$\int_0^{+\infty} g(x) = +\infty, \quad \text{mais} \quad \int_0^{+\infty} f(x)g(x) < \infty.$$

Indice : on pourra supposer que f est régulière et considérer sa dérivée logarithmique.

2. Montrer qu'une famille de variables aléatoires $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)/x = +\infty$ et

$$\sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[\phi(|X|)] < +\infty.$$

Exercice 8.10. *Autour de l'uniforme intégrabilité*

1. On considère l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n(\omega) := n$ si $\omega \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable.
2. Toujours sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on considère la famille de variables aléatoires

$$\mathcal{X} := \{X_\alpha, \, \alpha \in [0, 1/2]\}, \;\text{ où }\; X_\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega - \alpha}} \mathbb{1}_{]\alpha,1]}(\omega).$$

Montrer que la famille $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable mais qu'elle n'est pas dominée par une variable intégrable.

3. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux familles de variables aléatoires uniformément intégrables définies sur un même espace de probabilités. Montrer que la famille $\mathcal{Z} := \{Z = X + Y, \, X \in \mathcal{X}, \, Y \in \mathcal{Y}\}$ est uniformément intégrable.

Exercice 8.11. *Loi de Gumbel*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité $f_X(x) = e^{-x-e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité et calculer la fonction de répartition F_X associée.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Démontrer que la suite $(M_n - \ln(n))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

Exercice 8.12. *Convergence en loi vers une constante*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

Exercice 8.13. *Maximum d'exponentielles*
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1. Pour $a>0$ et $n\geq 2$, on note

$$A_{n,a} := \left\{ \frac{X_n}{\ln(n)} \geq a \right\}, \qquad A_a := \limsup_{n\to+\infty} A_{n,a}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n,a})$.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(A_a)=0$ si $a>1$ et que $\mathbb{P}(A_a)=1$ si $a\leq 1$.
3. Justifier que pour tout $a>0$ on a les inclusions
$$\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a \right\} \subset A_a \subset \left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \geq a \right\}.$$
4. En déduire que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = 1$ presque sûrement.
5. Montrer de même que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{\ln(n)} = 1$ presque sûrement.

Exercice 8.14. *Série alternée aléatoire*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher, i.e. vérifiant $\mathbb{P}(X_n=1)=\mathbb{P}(X_n=-1)=1/2$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}}$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{S_n} de S_n
2. Montrer que pour tout $t\neq 0$, lorsque n tend vers l'infini, $\varphi_{S_n}(t)$ tend vers zéro.
3. Montrer que
$$\left|\varphi_{S_{n+p}-S_n}(t)-1\right| \leq |t| + 2\,\mathbb{P}(|S_{n+p}-S_n|\geq 1).$$
4. En déduire l'existence d'une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $k\geq 1$,
$$\mathbb{P}(|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}|\geq 1)\geq 1/4.$$
5. Conclure que la suite (S_n) est presque sûrement divergente.

Exercice 8.15. *Lemme de Slutzky*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ telles que $X_n\to X$ et $Y_n\to Y$ en loi lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n\geq 1$ et que les variables limites X et Y sont également indépendantes. Montrer alors que $(X_n,Y_n)\to(X,Y)$ en loi.
2. Sans hypothèse d'indépendance, est-il toujours vrai que $(X_n,Y_n)\to(X,Y)$ en loi ?
3. (Lemme de Slutsky) On suppose que la variable limite Y est constante p.s. Montrer que dans ce cas, $(X_n,Y_n)\to(X,Y)$ en loi.

Exercice 8.16. *Moyenne de Césaro*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes dont les fonctions de répartition sont données par

$$F_{X_n}(x)=0 \text{ si } x\leq 0, \quad F_{X_n}(x)=1-\frac{1}{x+n} \text{ si } x>0.$$

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer qu'en revanche, la suite des moyennes de Césaro $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_i$ ne converge pas vers 0 en probabilité (on pourra calculer par exemple la fonction caractéristique).

9 Théorèmes limite et variantes

Exercice 9.1. *Sortie d'une marche aléatoire*
Soient $a < b$ et (X_n) une suite de variables aléatoires réélles i.i.d. de variance finie. Montrer en utilisant la LGN et/ou le TLC que $\inf\{n > 1,\ X_1 + \ldots + X_n \notin [a, b]\}$ est fini presque sûrement.

Exercice 9.2. *Somme de Bernoulli indépendantes*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ et $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini $S_n/n - \mu_n$ converge en probabilité vers zéro.
3. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 9.3. *LGN avec dépendance*
Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers et U une variable aléatoire de loi uniforme dans $[0, 1]$. On considére alors les variables aléatoires $X_n := \cos(2\pi\lambda_n U)$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini S_n/n converge en probabilité vers zéro.
2. Montrer que la convergence a en fait lieu presque sûrement.

Exercice 9.4. *Sommes poissonniennes*

1. Pour tout $x, \lambda > 0$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$$
2. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda),$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k - \lambda n}{\sqrt{n}}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} dt.$$

Exercice 9.5. *Théorème de Stone–Weierstrass*
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction polynomiale $b_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par la formule
$$\forall x \in [0, 1], \quad b_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire
$$\forall x \in [0, 1], \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$

2. Montrer que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |b_n(x) - f(x)| = 0.$$

3. Étendre le résultat ci-dessus à tout intervalle $[a, b]$.

Exercice 9.6. *Moyenne géométrique*

Soient $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables i.i.d. de loi uniforme dans $[0, 1]$ et $X_n := \left(\prod_{j=1}^n U_j\right)^{1/n}$.

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque surement et donner sa limite.
2. Montrer que $(e.X_n)^{\sqrt{n}}$ converge et déterminer la loi limite.

Exercice 9.7. *La formule de Stirling*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $S_n := \sum_{i=0}^n X_i$ et $Z_n = (n - S_n)/\sqrt{n}$.

1. Déteminer la loi de S_n.
2. En calculant $\mathbb{P}(Z_n \in [0, 1])$, retrouver la formule de Stirling $n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 9.8. *Théorème limite central par la méthode de Stein*

On propose une preuve alternative du théorème limite central basée sur la méthode de Stein. Par rapport à la preuve vue en cours, cette approche offre l'avantage de fournir une vitesse de convergence.

1. Montrer que l'on peut trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ satisfaisant

   $$\|h\|_\infty \leq 1, \quad \|h'\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} h(x)dx = 0,$$

   l'équation $f' - xf = h(x)$ admet une solution vérifiant $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \leq C$.

   Indice : on pourra remarquer que $\int_{-\infty}^x h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_x^\infty h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Faire des changements de variables $t = x + u$. Enfin, pour borner f_h'', dériver l'équation satisfaite par f_h. On remarquera en effet que f_h' vérifie la même équation que f_h mais le second membre est transformé en $h' + f_h$. Il suffit alors d'utiliser les majorations déjà obtenues.

2. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

   $$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1, \quad \mathbb{E}\left[|X_1|^3\right] < \infty.$$

   On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que

   $$\sup_{\|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty \leq 1} \left| \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq C \frac{\mathbb{E}\left[|X_1|^3 + |X_1|\right]}{\sqrt{n}}.$$

   Indice : poser $h = \phi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ et considérer f_h la solution de l'équation différentielle correspondante. Ensuite il faut écrire $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} f_h\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$, développer la première somme puis effectuer des développpements de Taylor à l'ordre 2 en chaque point $\frac{\sum_{k\neq i} X_k}{\sqrt{n}}$ qui a le bon gout d'être indépendant de X_i.

10 Variables gaussiennes

Exercice 10.1. *Convergence gaussienne*
Soit (X_n) une suite de variables gaussiennes $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. Montrer que X_n converge en loi lorsque n tend vers l'infini si et seulement si les suites (m_n) et (σ_n^2) convergent et auquel cas la limite est une gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = \lim_{n\to+\infty} m_n$ et $\sigma^2 = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2$. Généraliser au cas multidimensionnel.

Exercice 10.2. *Indépendance et orthogonalité*
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, de loi commune $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que les variables aléatoires $(X-Y)^2 + (X-Z)^2 + (Y-Z)^2$ et $X+Y+Z$ sont indépendantes.

Exercice 10.3. *Méthode de Box-Muller*
Soient (U_1, U_2) une variable uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$. On pose

$$Y_1 = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

1. Quelle est la loi de $Y_1^2 + Y_2^2$? et de Y_2/Y_1 ?
2. Montrer que le couple (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_2(0, \mathrm{Id}_2)$.

Exercice 10.4. *Moyennes et variances empiriques*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi, de moyenne commune m et de variance commune finie σ^2. On considère les moyennes et variance empiriques

$$\widehat{m}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \widehat{\sigma_n^2} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_n)^2.$$

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, les suites $(\widehat{m}_n)$ et $(\widehat{\sigma_n^2})$ convergent presque sûrement vers m et σ^2 respectivement.
2. Déterminer la loi du couple $(\widehat{m}_n, \widehat{\sigma_n^2})$ lorsque les variables X_i suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. En particulier montrer que dans ce cas, les variables $\widehat{m}_n$ et $\widehat{\sigma_n^2}$ sont indépendantes.
3. On s'intéresse à la réciproque du point précédent. On note φ la fonction caractéristique commune des X_i que l'on ne suppose plus gaussiennes, en revanche on suppose que les variables associées $\widehat{m}_n$ et $\widehat{\sigma_n^2}$ sont indépendantes.
   (a) On suppose tout d'abord pour simplifier que $m = \mathbb{E}[X_i] = 0$. Calculer $\mathbb{E}[n\widehat{\sigma_n^2}]$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $$\mathbb{E}[n\widehat{\sigma_n^2} e^{int\widehat{m}_n}] = (n-1)\sigma^2\varphi(t)^n.$$
   (b) En calculant explicitement $\mathbb{E}[n\widehat{\sigma_n^2} e^{it\widehat{m}_n}]$, montrer que la fonction φ est solution de l'équation différentielle
   $$\frac{\varphi''}{\varphi} - \left(\frac{\varphi''}{\varphi}\right)^2 = -\sigma^2, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$$
   (c) Conclure et généraliser au cas où $m \neq 0$.

Exercice 10.5. *Caractérisation gaussienne*
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont indépendantes et que la loi du vecteur aléatoire (X, Y) est invariante par les rotations de centre (0,0).

1. Montrer que $X \overset{loi}{=} Y$ et $X \overset{loi}{=} -X$.
2. On note φ la fonction caractéristique de X. Montrer que

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

3. Conclure.

Exercice 10.6. *Exemple de calcul gaussien*
Soient X, Y, Z trois vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi gaussienne standard $\mathcal{N}_2(0, \mathrm{Id}_2)$. Montrer que la probabilité que Z tombe dans le cercle de diamètre $Y - X$ qui passe par X et Y vaut $1/4$.

11 Miscellanées

Exercice 11.1. *Somme de variables de Cauchy*
Soient (X_n) des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Déterminer la loi de $(X_1 + \ldots + X_n)/n$.

Exercice 11.2. *Polynôme aléatoire*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $Z = X^2 - Y$.
2. On considère le polynôme $P(t) = t^2 - 2Xt + Y$. Calculer la probabilité que les deux racines de P soient réelles.

Exercice 11.3. *QCM et conditionnement*
Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiant.e.s répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant.e estime que 70% étudiant.e.s ont préparé sérieusement l'examen et que ces dernier.e.s répondent une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiant.e.s choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un.e étudiant.e, choisi.e au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un.e étudiant.e échoue, quelle est la probabilité qu'il/elle ait préparé l'examen ?

Exercice 11.4. *Indépendance et primalité*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble fini, de cardinal p un nombre premier, $\mathcal{F}$ la tribu des parties et $\mathbb{P}$ la loi uniforme. Montrer que événements A et B non triviaux (i.e. différents de $\emptyset$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 11.5. *Queue gausienne*
Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. En utilisant une intégration par parties, donner un équivalent lorsque x tend vers l'infini de $\mathbb{P}(X > x)$.

Exercice 11.6. *Indépendance et moments*
Soient X et Y deux variables aléatoires bornées. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement pour tous les entiers $k, \ell \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^\ell]$.

Exercice 11.7. *Delta-méthode*
Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et θ un réel tels que lorsque n tend vers l'infini

$$\sqrt{n}\,(X_n - \theta) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Soit g une fonction de classe C^1 avec $g'(\theta) \neq 0$, montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a alors

$$\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, g'(\theta)^2\sigma^2).$$

Quelle est l'asymptotique de $\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\theta))$ lorsque $g'(\theta) = 0$?

Exercice 11.8. *Une série aléatoire*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} X_n n^{-1} \sin(n\pi x)$ converge presque sûrement pour tout réel x.

Exercice 11.9. *Somme de produits*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et de carré intégrable. On note m leur espérance commune. Étudier la convergence presque sûre de la suite

$$S_n = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n}{n}.$$

Exercice 11.10. *Somme de produits, suite*
Soit (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout $j \geq 1$, $Z_j = X_j X_{j+1}$.

1. Calculer $\mathrm{Var}\,(Z_j)$ et $\mathrm{Cov}\,(Z_j, Z_{j+i})$ pour $i \geq 1$.
2. En déduire que
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\Omega)} \frac{1}{4}.$$
3. Les variables aléatoires $(Z_j)_{j\geq 1}$ sont-elles indépendantes ? Et les variables $(Z_{2k})_{k\geq 1}$?
4. Déduire de la question précédente que
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \frac{1}{4}.$$