CONTRÔLE CONTINU # 1

Durée 45min, aucun document autorisé.

Exercice 1 (Preuve alternative du lemme de Borel–Cantelli) *(5 points)*
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. *Montrer que l'on a l'égalité ensembliste*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \left\{ \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty \right\}.$$

Par définition, $\omega \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n auquel cas on a naturellement $\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = +\infty$. Réciproquement, si la somme diverge, ω est dans une infinité de A_n et donc dans la $\limsup$.

2. *Du lemme de Fubini, déduire que si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.*
D'après le lemme de Fubini–Tonelli, sous l'hypothèse que la série des proba converge, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty.$$

En particulier, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$ est nécessairement finie presque sûrement, autrement dit en passant au complémentaire

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\right) = 0,$$

en on conclut via l'identité de la première question.

Exercice 2 (Maximum de variables de Cauchy) *(15 points)*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Cauchy de paramètre 1, i.e. de densité commune $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n := M_n/n$.

1. *À l'aide du lemme de Borel–Cantelli, montrer que presque sûrement, on a $M_n > 0$ à partir d'un certain rang (aléatoire).*
On applique le lemme de Borel–Cantelli à la suite d'événements $A_n := \{M_n \leq 0\}$. On a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \mathbb{P}(X_1 \leq 0, \dots, X_n \leq 0) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq 0)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par suite, $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ et en prenant le complémentaire $\mathbb{P}(\liminf_n A_n^c) = 1$, ce qui signifie exactement que presque sûrement, $M_n > 0$ à partir d'un certain rang.

2. *Expliciter la fonction de répartition F_{Z_n} de la variable Z_n.*
Comme ci-dessus, comme les variables sont indépendantes et de même loi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n \leq x) &= \mathbb{P}(M_n \leq nx) = \mathbb{P}(X_1 \leq nx \leq, \dots, X_n \leq nx) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq nx)^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{nx} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}\right)^n = \left(\frac{1}{\pi}\left[\arctan(t)\right]_{-\infty}^{nx}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(nx)\right)^n.\end{aligned}$$

3. *Justifier rigoureusement que F_{Z_n} converge simplement lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite, notée F.*
Indice : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ *pour* $x > 0$ *et l'équivalent* $\arctan(x) = x + o(x)$ *au voisinage de zéro.*
D'après la première question, presque sûrement, on a $M_n > 0$ à partir d'un certain rang et donc $Z_n > 0$ à partir d'un certain rang. En particulier, pour $x \leq 0$, on a donc

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) \leq \mathbb{P}(Z_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour $x > 0$, en utilisant l'indication, la fonction de répartition de Z_n se réécrit

$$F_{Z_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{nx}\right)\right)^n = \exp\left(n\log\left(1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{nx}\right)\right)\right).$$

En utilisant les développements limités $\log(1-x) = -x + o(x)$ *et* $\arctan(x) = x + o(x)$ *au voisinage de zéro, on conclut que*

$$F_{Z_n}(x) = \exp\left(-\frac{1}{\pi x} + o(1/n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{\pi x}}.$$

Au final, on a donc $F(x) = e^{-\frac{1}{\pi x}}\mathbb{1}_{x>0}$.

4. *Justifier que la fonction limite F est en fait la fonction de répartition F_Z d'une variable aléatoire stricement positive Z de densité f_Z que l'on explicitera.*
La fonction F est bien croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, de plus elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En effet, c'est clair sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et par ailleurs on a $F'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{\pi x}}\right)$ au voisinage (à droite) de zéro, qui tend bien vers zéro avec x. D'après le cours, F est bien une fonction de répartition associée à une variable aléatoire Z de densité

$$f_Z(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi x^2}e^{-\frac{1}{\pi x}}\mathbb{1}_{x>0}.$$

5. *Déterminer de deux façons disctintes la loi de la variable $1/Z$.*
Comme Z et $1/Z$ ont même signe, pour $x \leq 0$ on a naturellement $F_{1/Z}(x) = 0$. Pour $x > 0$, comme $F = F_Z$ est continue, on écrit simplement

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{Z} > x\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{1}{x}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{x}\right) = F_Z\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{x}{\pi}},$$

de sorte que

$$F_{1/Z}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{Z} \leq x\right) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\pi}}\right)\mathbb{1}_{x>0}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/\pi$.

Autre méthode, si h est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, on écrit d'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{Z}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{1}{t}\right) f_Z(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+^*} h\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{\pi t^2} e^{-\frac{1}{\pi t}} dt.$$

Le changement de variables $t \to 1/u$ donne alors

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{Z}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(u) \frac{1}{\pi} e^{-\frac{u}{\pi}} du,$$

et on reconnaît à nouveau la densité d'une loi exponentielle de paramètre $1/\pi$.

6. *Question bonus : montrer de la même façon que la fonction de répartition de la variable $m_n := \min(X_1, \ldots, X_n)/n$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la fonction de répartition d'une variable à densité que l'on explicitera.*
   On peut faire des calculs tout à fait similaires mais le plus simple est de remarquer que les lois des variables X_n sont symétriques, aussi la loi de Y_n est la même que celle de $-Z_n$. La densité limite est aisni la symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de celle trouvée dans la question 4.

7. *Question bonus : si les variables (X_n) sont maintenant des variables de Cauchy indépendantes de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de densité*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2},$$

que devient loi de la variable limite $1/Z$ de la question 5 ?
On remarque que si X suit une loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$ alors X/λ suit une loi de Cauchy de paramètre 1. En effet, soit h une fonction continue bornée, on a

$$\mathbb{E}[h(X/\lambda)] = \int_{\mathbb{R}} h(x/\lambda) \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx,$$

et en posant $x = \lambda y$ il vient alors

$$\mathbb{E}[h(X/\lambda)] = \int_{\mathbb{R}} h(y) \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda^2(1+y^2)} dy = \int_{\mathbb{R}} h(y) \frac{1}{\pi} \frac{dy}{1+y^2}.$$

Ainsi, lorsque les variables (X_n) sont des variables indépendantes de loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$, la variable Z_n/λ a la même loi que celle obtenue dans le cas $\lambda = 1$ de fonction de répartition limite $F_Z(t) = e^{-\frac{1}{\pi x}} \mathbb{1}_{x>0}$ (question 3). Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z_n/\lambda \leq x) = F_{Z_n/\lambda}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{\pi x}} \mathbb{1}_{x>0}.$$

En posant $y = \lambda x$ i.e. $x = y/\lambda$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Z_n \leq y) = F_{Z_n}(y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{\lambda}{\pi y}} \mathbb{1}_{y>0}.$$

En prenant l'inverse comme dans la question 5, on obtient cette fois une variable exponentielle de paramètre λ/π.