Théorème de Radon Nikodym

Soient μ et ν deux mesures positives σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

On suppose que $\mu \ll \nu$ ie $\forall A \in \mathcal{F}$, $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Alors, il existe une fonction mesurable f, unique aux ν-négligeables près, telle que $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$.

La fonction f est appelée, dérivée de Radon-Nikodym ou densité de μ par rapport à ν.

Heuristique

: (il faudrait détailler les points "à vérifier" ci-dessous pour avoir une preuve complète)

unicité : si f et g sont deux candidats, on considère

$A = \{f > g\} \in \mathcal{F}$ alors $\mu(A) = \int_A f \, d\nu = \int_A g \, d\nu$

de sorte que $\int_A (f-g) \, d\nu = 0$ ie $\nu(A) = 0$ donc

$f \leq g$ ν-p.s, puis $f = g$ ν ps par symétrie.

existence : Quitte à faire une exhaustion par des compacts on se ramène du cas σ-fini au cas où μ et ν sont des mesures finies [le cas qui nous intéresse est celui des mesures de proba]

On considère l'ensemble de fonctions

$$E := \{f \text{ mesurable}, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}, \forall A \in \mathcal{F}, \int_A f \, d\nu \leq \mu(A)\}$$

- E est non vide car $0 \in E$
- On vérifie que
  - si $f, g \in E$ alors $\max(f,g) \in E$
  - si f_n suite croissante de E, $\lim_{n\infty} \uparrow f_n \in E$

- Si $A \in \mathcal{F}$ et $f, g \in E$, alors

$$\int_A \max(f,g)\, d\nu = \int_A g\, \mathbb{1}_{f \leq g}\, d\nu + \int_A f\, \mathbb{1}_{f>g}\, d\nu$$

$$= \int_{A \cap \{f \leq g\}} g\, d\nu + \int_{A \cap \{f>g\}} f\, d\nu \underset{Hyp}{\leq} \mu(A \cap \{f \leq g\}) + \mu(A \cap \{f>g\})$$

$$= \mu(A).$$

- Si $f_n \uparrow$ alors par convergence monotone, $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\int_A \lim_{n\infty}\uparrow f_n\, d\nu = \lim_{n\infty}\uparrow \int_A f_n\, d\nu \leq \mu(A).$$

- On pose alors

$$\alpha := \sup\left\{ \int f\, d\nu,\ f \in E \right\} \leq \mu(\Omega) \overset{Hyp}{<} \infty$$

et on choisit f_n tq $\int f_n\, d\nu \to \alpha$.

Enfin on pose $f^* := \lim_{n\infty} \uparrow \max(f_1, \dots, f_n)$.

D'après plus haut, $f^* \in E$.

D'après le théorème de cv monotone, on a

$$\alpha = \lim_{n\infty} \int f_n \, d\nu = \int f^* d\nu.$$

- Montrons que $\mu(A) = \int_A f^* d\nu$.

On considère la mesure $\sigma(A) = \mu(A) - \int_A f^* d\nu$.
comme $f^* \in E$, σ est une mesure positive.
Il s'agit de voir que σ est nulle. Par l'absurde supposons que $\exists \, \varepsilon_0 > 0$, tel que

$$\sigma(\Omega) = \mu(\Omega) - \int_\Omega f^* d\nu > \varepsilon_0 \, \nu(\Omega) \quad \circledast$$

et considérons la mesure signée $(\sigma - \varepsilon_0 \nu)$ et désignons par P le support de sa partie positive.
Pour $A \in \mathcal{T}$, on a alors

$$\begin{aligned} 0 \leq (\sigma - \varepsilon_0 \nu)^+ (A) &= (\sigma - \varepsilon_0 \nu)(A \cap P) \\ &= \sigma(A \cap P) - \varepsilon_0 \, \nu(A \cap P) \\ &\leq \sigma(A) - \varepsilon_0 \int_A \mathbb{1}_P \, d\nu \\ &= \mu(A) - \int_A (f^* + \varepsilon_0 \mathbb{1}_P) \, d\nu \end{aligned}$$

autrement dit $f^* + \varepsilon_0 \mathbb{1}_P \in E$.

Par ailleurs, on a $\nu(P) > 0$. Sinon, on aurait $\mu(P) = 0$ car $\mu \ll \nu$ et donc $\sigma(P) \leq \mu(P) = 0$ et par suite

$$(\sigma - \varepsilon_0 \nu)(\Omega) = \underbrace{(\sigma - \varepsilon_0 \nu)^+(P)}_{=0} - \underbrace{(\sigma - \varepsilon_0 \nu)^-(N)}_{\leq 0} \leq 0$$

ce qui contredit ⊛

On a donc bien $\nu(P) > 0$ et on remarque que $\forall A$

$$\int_A (f^* + \varepsilon_0 \mathbb{1}_P)\, d\nu - \int_A f^* d\nu = \varepsilon_0 \nu(P) > 0$$

ce qui contredit la maximalité de $\alpha = \int f^* d\nu$.

La preuve de Von Neumann

Comme dans la preuve précédente, on se ramène au cas de mesures finies

On pose cette fois $\sigma = \mu + \nu$ de sorte que si $\mu \ll \nu$

on a $\sigma(A) = 0$ ssi $\nu(A) = 0$.

On considère l'opérateur $T : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma) \to \mathbb{R}$ défini par

$$T(u) = \int_\Omega u \, d\nu .$$

Comme les mesures finies, on a

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \nu) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$$

de sorte que T est bien défini et par Cauchy-Schwarz

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)} \cdot \sqrt{\nu(\Omega)}$$

Ainsi, T est un opérateur linéaire borné et par le théorème de Riesz, il existe $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$ tq $\forall u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \sigma)$

$$T(u) = \int_\Omega u \, d\nu = \int_\Omega u g \, d\sigma . \qquad (**)$$

En particulier, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = \int_A g \, d\sigma$.

En considérant $A = \{x, g(x) < 0\}$ et $A = \{x, g(x) \geq 1\}$

on obtient facilement que $0 < g < 1$ μ et σ presque partout.

La fonction $1/g$ est $\mathcal{F}$mesurable et μ/σ presque sûrement positive alors pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a par (**)

$$\int_A \frac{1}{g} \cdot d\nu = \int_\Omega \frac{1}{g} \mathbb{1}_A \, d\nu = \int_\Omega \frac{1}{g} \mathbb{1}_A \cdot g \, d\sigma = \sigma(A).$$

Comme σ est finie, $\frac{1}{g}$ est ν intégrable, de même que $f = \frac{1}{g} - 1$. Alors $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \sigma(A) - \nu(A) = \int_A \left(\frac{1}{g} - 1\right) d\nu = \int_A f \, d\nu.$$

Références: Rudin Real and complex analysis
Folland Real analysis Modern Techniques and appli. (Théorème 3.8 p 90)
Briane Pagès : Théorie de l'intégration