

Fin section 3.1

Rappel: Si $E[X^k] < \infty$ alors φ_X est C^k avec

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k E[X^k e^{itX}].$$

avec une "presque réciproque".

Exemple: Si $X \sim E(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}^+$

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$$\varphi_X'(t) = \frac{\lambda i}{(\lambda - it)^2} \rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\varphi_X''(t) = \frac{-2\lambda}{(\lambda - it)^3} \rightarrow E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{On retrouve } \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.2 Autres transformations exponentielles.

Définition: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k \geq 0} s^k P(X=k).$$

Plus généralement, si $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^d$ on pose

$$G_X(s_1, \dots, s_d) = E[s_1^{X_1} \dots s_d^{X_d}].$$

Remarque:

- On a le lien "formel"
 $G_X(e^{it}) = \phi_X(t).$

- Comme le rayon de cr de la série est ≥ 1
la fonction $s \mapsto G_X(s)$ est C^∞ sur $[0,1[$
et $G_X^{(n)}(0) = n! \cdot \mathbb{P}(X=n).$
 $\rightarrow$ La fonction génératrice caractérise la loi.

- Par le théorème de dérivation sous le signe somme, G_X est n -fois dérivable en 1 ss.
 $\mathbb{E}[X^n] < \infty$ et

$$G_X^{(n)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)]$$

$\uparrow$ moment factoriel.

Exemples : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $G_X(s) = (1-p) + p \cdot s$

• Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = \exp(\lambda(s-1)).$ Z

Proposition : Soient X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

1) $X \perp Y \Leftrightarrow G_{(X,Y)}(s,t) = G_X(s) G_Y(t)$

2) $X \perp Y \Rightarrow G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$

Exemple : . Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(s) = (1-p + ps)^n$.

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X + Y$

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)} e^{\mu(s-1)} \\ = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Définition : Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On définit sa transformée de Laplace $L_X : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ par la formule :

$$L_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{t \cdot X} \right] \quad \text{où } t = (t_1, \dots, t_d) \\ t \cdot X = \sum_{i=1}^d t_i X_i$$

Remarque : . On a " $\varphi_X(t) = L_X(it)$ ".

• Contrairement à la fonction caractéristique ou la fonction génératrice, L_X peut valoir $+\infty$.

Proposition : Soit X une variable aléatoire :

1) $L_X(0) = 1$

2) Si $L_X(t) < \infty$ sur un voisinage de zéro alors elle est développable en série entière :

$$L_X(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[X^n] \quad \text{et } \mathbb{E}[X^n] = L_X^{(n)}(0).$$

Suite à une question de Victor :

Remarque: Si elle est finie sur un voisinage V de zéro, la transformée de Laplace caractérise le p.i.

La raison est la suivante :

- Si $L_x(t)$ est finie sur V alors la fonction de la variable complexe $z \mapsto H_x(z) := \int_0^\infty e^{-zx} L_x(x) dx$ est bien définie sur l'ouvert $G = \{z = x + iy, x \in V, y \in \mathbb{R}\}$ et elle y est holomorphe.
Restreinte à la droite imaginaire $i\mathbb{R}$, H_x n'est autre que la transformée de Fourier φ_x .

- Le théorème de prolongement analytique dit que si deux fonctions holomorphes coïncident sur un ensemble qui possède un point d'accumulation, alors elles coïncident sur leur ouvert maximal de définition.

- Ici H_x coïncide avec L_x sur V et avec φ_x sur $i\mathbb{R}$.

- Ainsi, si on connaît L_x sur V , par prolongement analytique, on connaît φ_x et comme φ_x caractérise le p.i. de X , L_x caractérise le p.i.

En particulier $X \in \mathcal{L}^p \quad \forall p \geq 1$.

Remarque : Si X une variable positive, on pourra considérer alternativement :

$$\tilde{L}_X(t) = \mathbb{E}[e^{-tX}] \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Proposition : Si X, Y sont des v.a. réelles.

$$1) \quad X \perp Y \Leftrightarrow L_{(X,Y)}(t,s) = L_X(t) \cdot L_Y(s)$$

$$2) \quad X \perp Y \Rightarrow L_{X+Y}(t) = L_X(t) \cdot L_Y(t).$$

Exemple : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \tilde{L}_X(t) &= \mathbb{E}[e^{-tX}] = \int_0^{\infty} e^{-tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + t} \end{aligned}$$

• Si $Y \sim \Gamma(m, \lambda)$, $f_Y(u) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \underbrace{x^{m-1} e^{-\lambda x}}_{\mathbb{1}_{x \geq 0}}$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{-tY}] = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \underbrace{x^{m-1} e^{-(t+\lambda)x}}_{\mathbb{1}_{x \geq 0}} dx \\ &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \cdot \frac{\Gamma(m)}{(\lambda+t)^m} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t} \right)^m \end{aligned}$$

i.e. Si $X_1, \dots, X_m \sim \mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes mutuellement.

$$X_1 + \dots + X_m \sim \Gamma(m, \lambda).$$

4. Probabilités, lois et espérances conditionnelles.

4.1 Probabilités conditionnelles

Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de proba et $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. On définit la probabilité conditionnelle sachant A comme

$$P(\cdot | A) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$P(B | A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

Remarque : $B \mapsto P(B | A)$ est bien une probabilité.

$$P(\Omega | A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P\left(\bigcup_i B_i | A\right) = \frac{P\left(\bigcup_i B_i \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_i (B_i \cap A)\right)}{P(A)}$$

$$= \sum_i \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_i P(B_i | A).$$

$$\bullet A \perp B \Rightarrow P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \stackrel{!}{=} \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B).$$

Proposition (formule des probabilités totales)
← dénombrable

Si $\Omega = \bigcup_i A_i$ avec $P(A_i) > 0$ alors $\forall B \in \mathcal{F}$

$$\text{on a } P(B) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i)$$

Preuve : on écrit $B = B \cap \Omega = \bigcup_i (B \cap A_i)$

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i)$$

Ex : $\Omega = A \cup A^c$ ($P(A) \in]0, 1[$)

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c).$$

Proposition : (formule de Bayes)

Si $\Omega = \bigcup_i A_i$ avec $P(A_i) > 0$ et si $P(B) > 0$
alors

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$$

Preuve : $P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$

+ formule des prob. totales au dénominateur.

Exemple: un virus atteint 95% de la population, un test T permet de décider si on est malade ou pas avec la fiabilité suivante:

$$P(M) = \frac{95}{100}$$

$T \oplus$ pour 95% des malades $P(M^c) = \frac{99,5}{100}$

$T \ominus$ pour 99% des non malades

On note M pour malade. Calculons

$$P(M | \oplus) = \frac{P(\oplus | M) P(M)}{P(\oplus | M) P(M) + \underbrace{P(\oplus | M^c)}_{\text{red}} \underbrace{P(M^c)}_{\text{green}}}$$

$$= \frac{\frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{99,5}{100}} \approx 0,32.$$

4.2 Loi d'espérance conditionnelle

Définition: Soit X une v.a. discrète et $x \in X(\Omega)$

tel que $P(X=x) > 0$. La loi conditionnelle sachant $\{X=x\}$ est définie par:

$$\rightarrow P^{X=x}(B) = P(B | X=x) \quad \forall B \in \mathcal{F}.$$

On appelle espérance conditionnelle sachant $\{X=x\}$ on note $E[\cdot | X=x]$ l'espérance sous la loi $P^{X=x}$

Exemple: on lance 2 dés, on note X, Y les résultats

$$\begin{aligned}
 E[X | X+Y=8] &= \sum_{k=1}^6 k \cdot P(X=k | X+Y=8) \\
 &= \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{P(X=k \text{ et } X+Y=8)}{P(X+Y=8)} = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{P(X=k, Y=8-k)}{P(X+Y=8)} \\
 &= \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{P(X=k) P(Y=8-k)}{P(X+Y=8)} = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{P(X=k) P(Y=8-k)}{P(X+Y=8)} \\
 &= \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{(1/36)}{(5/36)} = \frac{1}{5} \left(\sum_{k=1}^6 k \right) = 4.
 \end{aligned}$$

Par symétrie $E[Y | X+Y=8] = E[X | X+Y=8]$

$$E[X+Y | X+Y=8] = 8$$

$$\Rightarrow E[X | X+Y=8] = 4. \quad !$$

Définition: Soit (X, Y) un couple de v.v. à densité $f_{(X,Y)}(x,y)$. On définit la densité conditionnelle de Y sachant $\{X=x\}$

$$f_{Y|X=x}(y) := \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{\int f_{(X,Y)}(x,y) dy}$$

C'est une densité de proba

L'espérance associée est l'espérance conditionnelle sachant $\{X=x\}$, i.e si h mesurable bornée.

$$E[h(Y) | X=x] = \int h(y) f_{Y|X=x}(y) dy$$

Exemple : Soit (X, Y) de densité $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x} e^{-\frac{y+x}{x}} \mathbb{1}_{y>0}$

$$\text{Ainsi: } \int f_{X,Y}(x, y) dy = e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}} dy = e^{-x}$$

$$\text{donc } f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}} \mathbb{1}_{y>0}.$$

$$\text{i.e. } L(Y | X=x) = E\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$E[Y | X=x] = x.$$