

3. Transformées exponentielles

3.1 Fonction caractéristique

Définition : Soit $X = (X_1, \dots, X_d) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ v. v. v. aléatoire. On définit sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ comme

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{i t \cdot X} \right] = \mathbb{E} \left[e^{i \sum_{k=1}^d t_k X_k} \right].$$

Remarque : φ_X est toujours bien définie car $|e^{itx}| \leq 1$ donc e^{itx} est intégrable.

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx} P_X(dx)$$

ie φ_X est la transformée de Fourier de la mesure P_X

Exemple : si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{itX} \right] &= e^{it \cdot 0} P(X=0) + e^{it \cdot 1} P(X=1) \\ &= (1-p) + p e^{it}. \end{aligned}$$

• Soit U_λ de densité $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$ sur $\mathbb{R}$ (Laplace)

$$\mathbb{E} \left[e^{itU_\lambda} \right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|} du = \frac{\lambda}{\lambda - it} + \frac{\lambda}{\lambda + it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.$$

En particulier $\varphi_{U_\lambda}(\lambda t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Cauchy au $\frac{1}{\pi}$ près)

Théorème : La fonction caractéristique caractérise P ou P_0 ,
 ie si : $\varphi_X = \varphi_Y$ alors $P_X = P_Y$.

Preuve 1 : Le théorème découle de la formule d'inversion de Fourier. On a de fait $P_X = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X)$ donc si : $\varphi_X = \varphi_Y$
 $P_X = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_Y) = P_Y$.

Preuve 2 : Soit X une va de P_0 ; P_X et U une variable indépendante de P_0 : la p.f.c. (λ) ie $\varphi_U(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$.
 Soit $h \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par convergence dominée

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h(x-\lambda t) \frac{dt}{\pi(\lambda t^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h(x-\lambda t) \mathbb{E}[e^{i\lambda t U_\lambda}] dt \end{aligned}$$

Toujours par convergence dominée et par Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)] &= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X-\lambda t)] \mathbb{E}[e^{i\lambda t U_\lambda}] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X-\lambda t) e^{i\lambda t U_\lambda}] dt \\ &\stackrel{\lambda t = s}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X-s) e^{is U_\lambda}] \frac{ds}{\lambda} \\ &\stackrel{X-s=v}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(v) e^{i(X-v) U_\lambda}] \frac{ds}{\lambda} \\ &\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h(v) \underbrace{\mathbb{E}[e^{i(X-v) U_\lambda}]}_{\substack{\text{ne dépend de } X \\ \text{que via } P_0}} \frac{dv}{\lambda} \\ &= \mathbb{E}[e^{-iv U_\lambda} \varphi_X(U_\lambda)] \end{aligned}$$

Ainsi, si $\varphi_x = \varphi_y$, on a $\forall h \in \mathbb{C}$
 $E[h(X)] = E[h(Y)]$.

Comme on l'a vu dans le cours précédent, cela permet d'affirmer que $P_x = P_y$. $\square$

Proposition: Soit X un vecteur aléatoire et φ_x sa fonction caractéristique, alors

- 1) $|\varphi_x(t)| \leq 1$
- 2) $\varphi_x(-t) = \overline{\varphi_x(t)}$
- 3) $\varphi_x(0) = 1$
- 4) φ_x est uniformément continue
- 5) φ_x est de type positif i.e.

$$\forall n, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \quad (*)$$

$$\sum_{j,k=1}^n \varphi_x(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j \geq 0.$$

Preuve: 1) 2) 3) OK

$$4) \quad \varphi_x(t+h) - \varphi_x(t) = E \left[e^{i(t+\frac{h}{2}) \cdot X} \left(e^{i\frac{h}{2} \cdot X} - e^{-i\frac{h}{2} \cdot X} \right) \right]$$

$$= 2i E \left[e^{i(t+\frac{h}{2}) \cdot X} \sin \left(\frac{h}{2} \cdot X \right) \right] \quad \text{donc}$$

$$|\varphi_x(t+h) - \varphi_x(t)| \leq 2 E[|\sin(\frac{h}{2} \cdot X)|] \leq E[2 \wedge |h| |X|]$$

5) On remarque que $\vec{z} \xrightarrow{\text{indép de } t} 0$.

$$\sum_{j,k=1}^n \varphi_x(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j = E \left[\left| \sum_{j=1}^n e^{it_j \cdot X} z_j \right|^2 \right] \geq 0.$$

Théorème (Bochner-Herglotz)

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue en zéro, avec $\varphi(0)=1$ et φ est de type positif. Alors φ est la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire.

Preuve: admise, voir poly JC Breton.

Théorème (Inversion de Fourier)

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ caractéristique φ_X .

On suppose φ_X intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors X admet une densité f_X continue bornée donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it \cdot x} \varphi_X(t) dt.$$

Preuve: Comme plus haut, si $h \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on écrit

$$\mathbb{E}[h(X)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(v) \mathbb{E}[e^{-ivU_\lambda} \varphi_X(U_\lambda)] \frac{dv}{\lambda}$$

$$\text{or } \frac{1}{\pi\lambda} \mathbb{E}[e^{-ivU_\lambda} \varphi_X(U_\lambda)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-iv.u} \varphi_X(u) \frac{e^{-\lambda|u|}}{2\pi} du$$

Si $\varphi_X \in L^1$ alors par convergence dominée, Pour $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\pi\lambda} \mathbb{E}[e^{-ivU_\lambda} \varphi_X(U_\lambda)] \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iv.u} \varphi_X(u) du$$

de sorte que par cv dominée toujours

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(v) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iv.u} \varphi_X(u) du \right)}_{f_X(v)} dv. \quad \square$$

Théorème : Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, alors les $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes ssi :

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k) \quad \forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve : On a vu que les (X_i) sont indep ssi :

$$P_X = P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$$

Ainsi comme les fonctions caractéristiques caractérisent les lois, (X_i) indep $\Leftrightarrow \varphi_X = \varphi_{P_X \otimes \dots \otimes P_{X_n}}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \varphi_{P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}}(t_1, \dots, t_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{it_1 x_1 + \dots + t_n x_n} P_{X_1}(dx_1) \dots P_{X_n}(dx_n) \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{it_k x_k} P_{X_k}(dx_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition : Si X et Y sont des variables indep, alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Si $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}]$$

$$\stackrel{1}{=} \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t) \varphi_Y(t). \quad \square$$

Proposition : Si X est un v.a. réelle de f.c.D. caractéristique φ_X .

• Si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ alors φ_X est de classe C^p et $\forall k \leq p$

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

• Réciproquement si φ_X est p fois dérivable en zéro alors $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour $k \leq 2 \lfloor p/2 \rfloor$.

Preuve : • Si $E[|X|^p] < \infty$ alors $E[|X|^q] < \infty \quad \forall q \leq p$.

Alors pour $\omega \in \Omega$, $\varphi(t) = e^{itX(\omega)}$ est C^∞

avec $\varphi^{(k)}(t) = (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}$ de sorte que

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq |X(\omega)|^k \in L^1$$

Par le théorème de dérivation sous le signe d'intégration

On déduit que $\varphi_X(t) = E[\varphi(t)]$ est $C^k \quad \forall k \leq p$

avec $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$.

• Réciproquement, supposons que φ_X est p fois dérivable en zéro. Montrons par récurrence que $X \in L^{2k}$ pour $k \leq \lfloor p/2 \rfloor$.

- pour $k=0$, c'est évident!

- supposons que pour $k < \lfloor p/2 \rfloor$ on ait $X \in L^{2k}$

d'après ci-dessus φ_X est C^{2k} avec

$$\varphi_X^{(2k)}(t) = (-1)^k E[X^{2k} e^{itX}]$$

Comme $k < \lfloor p/2 \rfloor$, $k+1 \leq \lfloor p/2 \rfloor$

et $2k+2 \leq 2\lfloor p/2 \rfloor \leq p$. donc $\varphi_X \in C^{2k+2}$

$$\varphi_X^{(2k+2)}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_X^{(2k)}(\varepsilon) + \varphi_X^{(2k)}(-\varepsilon) - 2\varphi_X^{(2k)}(0)}{\varepsilon^2}$$

$$= (-1)^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E \left[\frac{e^{i\varepsilon X} + e^{-i\varepsilon X} - 2}{\varepsilon^2} X^{2k} \right]$$

$$= (-1)^{k+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E \left[\left(\frac{\sin(\varepsilon X/2)}{\varepsilon X/2} \right)^2 X^{2k+2} \right]$$

Par Fubini, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^{2k+2}] &= \mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon X}{2}\right)}{\varepsilon X/2}\right)^2 X^{2k+2}\right] \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon X}{2}\right)}{\varepsilon X/2}\right)^2 X^{2k+2}\right] \\ &= (-1)^{k+1} \varphi_X^{(2k+2)}(0) < \infty, \quad \square \end{aligned}$$

Exemples: • Si: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$\varphi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$$\varphi_X'(t) = \frac{\lambda i}{(\lambda - it)^2} \rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\varphi_X''(t) = -\frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3} \rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{donc } \text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

• Si: $S_m \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $S_m = \sum_{i=1}^m X_i$ avec $X_i \perp \sim \mathcal{B}(p)$

$$\varphi_{S_m}(t) = \mathbb{E}[e^{it \sum X_i}] = \mathbb{E}[e^{it X_1}]^m = (1-p + pe^{it})^m$$

En dérivant:

$$\varphi_{S_m}'(t) = m(1-p + pe^{it})^{m-1} ipe^{it}$$

$$\varphi_{S_m}''(t) = m(m-1)(1-p + pe^{it})^{m-2} (-p^2 e^{2it}) + m(1-p + pe^{it})^{m-1} (-pe^{it})$$

$$\text{En particulier } \mathbb{E}[S_m] = mp \text{ et } \mathbb{E}[S_m^2] = m(m-1)p^2 + mp$$

et l'on retrouve bien $\text{var}(S_m) = mp(1-p)$.