

Esperance et moments

1. Esperance et moments

On commence par rappeler la formule de transfert.

Soit $\varphi: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ mesurable

Si μ mesure sur $(X, \mathcal{F})$ alors la mesure image par

φ est $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{G}$.

Si $h: (Y, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable alors

h est ν -intégrable ss $h \circ \varphi$ est μ -intégrable

$$\int_X h \circ \varphi(x) \mu(dx) = \int_Y h(y) \nu(dy).$$

1.1 Esperance : définition et premières propriétés

Définition : Si $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a. réelle, on dit que X est intégrable (ou P -intégrable) si :

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x| P_X(dx) < \infty.$$

Définition : On définit l'espérance d'une v.a. réelle X , positive ou intégrable, que l'on note $E[X]$, comme

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx).$$

Plus généralement, si h mesurable avec $\underline{h(x) \geq 0}$
ou $\underline{h(x)}$ P -intégrable, on a

$$\mathbb{E}[\underline{h(X)}] = \int_{\Omega} h(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx).$$

Si: $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
mesurable

$$\mathbb{E}[h(X_1, \dots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) P_{(X_1, \dots, X_n)}(dx_1, \dots, dx_n).$$

Remarque: Les intégrales ci-dessus sont à considérer
au sens du Lebesgue

• Si: $X = \mathbb{1}_A$, $\mathbb{E}[X] = P(A)$

• Si: $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $a_i \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$

• Si: $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sup \{ \mathbb{E}[Y], Y \text{ déj. } \geq 0, Y \leq X \}$

• Si: $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$

Concrètement:

• Si: X est discrète $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$
et $P(X = x_i) = p_i \in [0, 1]$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) p_i = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) P(X = x_i)$$

- Si X est à densité $f_X(u)$

$$E[X] = \int x f_X(u) du \quad \left| \rightarrow P_X(du) = f_X(u) du. \right.$$

$$E[h(X)] = \int h(u) f_X(u) du$$

Définition: Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire avec $E[|X_i|] < \infty$ pour $i=1, \dots, n$ alors on définit

$$E[X] := (E[X_1], \dots, E[X_n])$$

On dit X est centré si $E[X_i] = 0 \quad \forall i$.

Proposition: Si X et Y sont deux v.a. réelles (positives ou intégrables)

1) Si $X \leq Y$ p.s. alors $E[X] \leq E[Y]$.

2) $\forall \lambda, \mu, E[\lambda X + \mu Y] = \lambda E[X] + \mu E[Y]$

3) $|E[X]| \leq E[|X|]$

4) Si $X \geq 0$ p.s. et $E[X] = 0$ alors $X = 0$ p.s.

Preuve: Cf cours d'intégration □

Remarque: L'espérance n'est autre qu'une intégrale par rapport à IP donc les théorèmes classiques s'appliquent

- convergence monotone

Si $X_n \nearrow X$ suite positive alors

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_n].$$

- Fatou : Si $X_n \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_n]$$

- cv dominée.

Si $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$ et
 $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ avec Y intégrable

alors

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_n]$$

" $\mathbb{E} [X]$

Proposition : (inégalité de Markov)

Si $t > 0$, alors

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}.$$

Preuve : $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{\substack{|X| > t}} \right] + \mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{\substack{|X| \leq t}} \right]$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\geq t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\substack{|X| > t}} \right] \\ = t \mathbb{P}(|X| > t)}}$
 $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\geq 0}$

$$\text{i.e. } \mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}.$$

variante: si $\mathbb{E}[e^{\lambda|X|}] < \infty$ pour $\lambda > 0$.

$$\mathbb{P}(|X| > t) = \mathbb{P}(e^{\lambda|X|} > e^{\lambda t})$$

$$\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda|X|}]}{e^{\lambda t}}$$

□

Proposition: (Inégalité de Jensen)

Soit X une variable réelle, φ une fonction convexe telle que X et $\varphi(X)$ sont intégrables

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X]).$$

par ex: $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ ←

Preuve: $\varphi(x) = \sup \{ f(x), f \text{ affine}, f \leq \varphi \}$

et conclut par positivité et linéarité de l'espérance. □

Proposition: Soit X une variable positive, alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt.$$

Si $X(\omega) \in \mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$

Preuve: D'après Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt &= \int_0^\infty \mathbb{E} \left[\frac{1}{X > t} \right] dt = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \frac{1}{X > t} dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^X dt \right] = \mathbb{E}[X]. \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Moments d'ordre supérieurs

Définition: on dit qu'un v.a. réelle admet un moment d'ordre $p > 0$ si

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \int_{\Omega} |X(\omega)|^p \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \mathbb{P}_X(dx) < \infty.$$

On écrit $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ et on note

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace des v.a. admettant un moment d'ordre p [on identifie les variables aléatoires qui sont égales p.s., ou encore qui coïncident en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$ -négligeable]

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left\{ X, \text{ t.q. } \exists c > 0 \text{ t.q. } \mathbb{P}(|X| > c) = 0 \right\}$$

Les inégalités classiques vu en intégration "s'étendent" dans ce cadre probabiliste.

Cauchy - Schwarz et Hölder

Si $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $X \in L^p$, $Y \in L^q$

$$\begin{aligned}\|XY\|_1 = E[|XY|] &\leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \\ &= \|X\|_p \cdot \|Y\|_q.\end{aligned}$$

en particulier si $p = 2$

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2] E[Y^2]}$$

Minkowski

Si $p > 1$, $X, Y \in L^p$

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Définition : Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variance de X est

$$\rightarrow \text{var}(X) := E[|X - E[X]|^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0.$$

C'est l'écart quadratique à la moyenne.

L'écart type est $\sqrt{\text{var}(X)} = \|X - E(X)\|_2$

Si $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit la covariance comme $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \in \mathbb{R}$
c'est la version polarisée de la variance.

Propriétés: on a

1) $\text{var}(X) \geq 0$.

2) $\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{var}(X)$.

3) $\text{var}(X + \alpha) = \text{var}(X)$ si $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) $\text{var}(X) = 0 \Rightarrow X$ est constante p.s
 $X = \mathbb{E}[X]$ p.s

5) $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

Proposition: (inégalité de Tchebychev)

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $t > 0$ alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > t) \leq \frac{\text{var}(X)}{t^2}.$$

Preuve: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > t) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 > t^2)$
 $\leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^2]}{t^2} = \frac{\text{var}(X)}{t^2} \quad \square$
Markov

1.3 Moments des variables aléatoires

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, i.e. $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$.

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p.$$

$$E[X^2] = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = p$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

- Si $X \sim U_{\{x_1, \dots, x_m\}}$ alors

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_i x_i \quad \text{moyenne arithmétique.}$$

- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$E[X] = np, \quad \text{var}(X) = np(1-p).$$

- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

$$\text{var}(X) = \dots$$

- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

$$\text{var}(X) = \dots = \lambda.$$

• S: $X \sim U_{[a,b]}$, $E[X] = \frac{a+b}{2}$.
 $\text{var}(X) \dots$

• S: $X \sim E(\lambda)$, $f_{X|n} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$.

$$E[X] = \int x f_{X|n} dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-e^{-\lambda x} \cdot x \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

• S: $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$E[X] = m$$

$$\text{var}(X) = \sigma^2$$

• Si $X \sim \text{Cauchy}(1)$ i.e. $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$,

$$E[|X|] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2} dx = +\infty!$$