

Proposition: Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de densité f_X et soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Alors $Y = \varphi(X)$ est une r.v. à densité f_Y :

$$f_Y(u) = f_X(\varphi^{-1}(u)) J(\varphi^{-1})$$

$$\text{où } J(\varphi^{-1}) = |\det(\partial_i \varphi_j^{-1}(u))|.$$

Preuve: $P_Y(B) = P(Y \in B) = P(\varphi(X) \in B)$

$$= P(X \in \varphi^{-1}(B))$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(B)} f_X(x) dx = \int_B \underbrace{f_X(\varphi^{-1}(u)) J(\varphi^{-1})}_{\text{densité } f_Y(u)} du.$$

Retour sur l'exemple précédent:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([1,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Lebesgue})$$

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

$$\omega \mapsto \omega$$

$$Y: \omega \mapsto \omega^2 - 1.$$

$$Y = \varphi(X) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = x^2 - 1.$$

$$\varphi^{-1}(u) = \sqrt{u+1}, \quad \varphi^{-1}(u)' = \frac{1}{2\sqrt{u+1}}.$$

$$P_Y([a,b]) = P(Y \in [a,b]) = \int_a^b 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+1}} du.$$

Proposition : Soit (X,Y) un couple de v.a. réelles de densité $f_{X,Y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors X et Y sont à densité, données par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx$$

← densités marginales.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} P_X(A) &= P(X \in A) = P(X \in A, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{A \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx dy \stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_A \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy}_{\text{densité de } X} \right) dx \end{aligned}$$

idem pour Y .

□

Proposition : Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité $f_{X,Y}$. Alors X et Y sont indépendantes si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Preuve: Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A \text{ et } Y \in B)$$

$$= \int_{A \times B} f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

$$P_X(A) P_Y(B) = \int_A f_X(x) dx \cdot \int_B f_Y(y) dy = \int_{A \times B} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

ie. $X \perp Y \Leftrightarrow \int_{A \times B} \underline{f_{X,Y}(x,y)} dx dy = \int_{A \times B} \underline{f_X(x) f_Y(y)} dx dy \quad \forall A, B$

$$\text{ie } f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

□

Plus généralement, si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une densité
alors, les X_i sont mutuellement indépendantes

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_i^d f_{X_i}$$

3. Variables aléatoires usuelles

3.1 Variables aléatoires discrètes

- On dit qu'une v.a. X est une v.a. de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ ou plus généralement un ensemble à 2 points

et $IP(X=0) = 1-p$, $IP(X=1) = p$,

On notera $X \sim B(p)$

- On dit X suit la loi Binomiale de param n et p
 $X \sim B(n, p)$ si: $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

$$IP(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- On dit X suit une loi géométrique de param $p \in]0,1]$
si: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$IP(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

- On dit que X suit une loi de Poisson de param $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si
 $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$IP(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- On dit que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ si: $IP(X=x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i=1, \dots, n$

$$\text{i.e. } IP(X \in A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

3.2 Variables aléatoires à densité.

- On dit que X est uniforme dans $[a, b]$ et on note $X \sim U[a, b]$ si P_X est à densité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$$

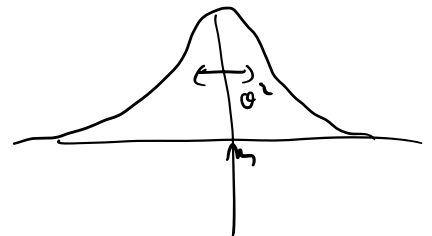
- On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et X a une densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

- On dit que X suit une loi normale ou gaussienne de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in [0, \infty[$ et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si $X(\Omega) \in \mathbb{R}$ et X a pour densité

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$



- On dit que X suit une loi $\Gamma(m, \lambda)$ si $X(\Omega) \in \mathbb{R}^+$ et
- $$f_X(x) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} e^{-\lambda x} x^{m-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

- On dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2}.$$