Proposition : Soit F une fonction càdlàg croissante que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Alors F est la fonction d'une v.a. X

Preuve : On construit X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$

On note pour $\omega \in (0,1)$

$$X(\omega) = F^{-1}(\omega) := \inf \{ t \in \mathbb{R}, F(t) \geq \omega \}$$

qui existe car $F \nearrow$ et $\overline{F(\mathbb{R})} = [0,1]$

X est bien mesurable car F est càdlàg. et

$$X(\omega) \leq x \iff \omega \leq F(x).$$

de sorte que
$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\omega \leq F(x)) = \lambda([0, F(x)]) = F(x).$$

2.2 Notion de densité

Définition : Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que μ est absolument continue par rapport à ν et on note $\mu \ll \nu$ si $\forall A \in \mathcal{F}$ $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Théorème (Radon-Nikodym) Si $\mu \ll \nu$ alors il existe une fonction mesurable f tq

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu(A) = \int_A f \, d\nu$$

i.e $\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \cdot f \, d\nu$.

La fonction f est appelée | dérivée de Radon-N | densité de μ par rapport à ν. Si μ et ν sont positives et μ finie alors f est positive et $f \in \mathbb{L}^1(\nu)$.

Preuve : admise ou exo.

Définition : On dit qu'une v.a réelle X est à densité si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Auquel cas la fonction $f_X \geq 0$, $f_X \in \mathbb{L}^1$ (dérivée de R-N) est appellée densité de X (de la loi de X).

Autrement dit $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx,$$

En particulier $\mathbb{P}_X([a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$

<u>Exemple</u> : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Lebesgue})$

$$\begin{aligned} Y : (\Omega, \mathcal{F}) &\to ([-1,0], \mathcal{B}([-1,0])) \\ \omega &\longmapsto \omega^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y([a,b]) &= \mathbb{P}[Y \in [a,b]] \qquad \text{si } [a,b] \subset [-1,0] \\ &= \mathbb{P}(\{\omega,\ \omega^2 - 1 \in [a,b]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega,\ \omega \in [\sqrt{a+1}, \sqrt{b+1}]\}) \\ &= \sqrt{b+1} - \sqrt{a+1} \\ &= \int_a^b \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}_{\text{densité } f_Y(x)}\,dx \end{aligned}$$

<u>Remarque</u> : réciproquement, si f est une fonction mesurable positive d'intégrale 1 par rapport à la mesure de Lebesgue, la formule

$\mathbb{P}(A) = \int_A f\,d\lambda$ définit une mesure de proba.

Proposition : Si X est un v.a réelle de densité f_X. Alors

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.

2) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

3) Si f_X est continue en x_0 alors F_X est dérivable en x_0 et $F_X'(x_0) = f(x_0)$.

4) Si X a pour fonction de répartition
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \text{avec } f \text{ mes.} \geq 0$$
alors X a pour densité f.

Preuve : 1) C'est la définition
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) \overset{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

2) La mesure de Lebesgue ne charge pas les singletons donc $\mathbb{P}_X$ non plus, et d'après le cours d'hier F_X est continue

3) Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \ll 1$ tq $\forall |h| < \delta$
$* \; |f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$, alors
$$|F_X(x_0+h) - F_X(x_0) - h f_X(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f_X(t) - f_X(x_0)]\,dt \right|$$
$$\leq \varepsilon |h|.$$

d'où le résultat.

4) Si μ mesure de densité f, alors μ et $\mathbb{P}_X$ coïncident sur les ensembles $(]-\infty, x], x \in \mathbb{R})$ et donc sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

<u>Remarque</u> : Si X est v.a. réelle avec F_X continue, X n'est nécessairement à densité.
C'est le cas si F_X est absolument continue, i.e $\exists f$ intégrable tq $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Une fonction continue, dérivable de dérivée L^1 n'est pas forcément l'intégrale de sa dérivée, cf escalier de Cantor.

<u>Définition</u> : Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable est appelée densité si $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\lambda^d(dx) = 1$

Un vecteur aléatoire $X = (X_1 \dots X_d)$ a pour loi la loi de densité f si $\forall [a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $i \in [\![1, d]\!]$

$$\mathbb{P}\left(X \in \prod_1^d [a_i, b_i]\right) = \int_{\prod_1^d [a_i, b_i]} f(x)\,\lambda^d(dx).$$

$$= \int_{\prod [a_i, b_i]} f(x_1 \dots x_d)\,dx_1 \dots dx_d.$$

Proposition : Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de densité f_X et soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Alors $Y = \varphi(X)$ est une va à densité f_Y :

$$f_Y(u) = f_X(\varphi^{-1}(u))\, J\varphi^{-1}(u)$$

$$\text{où } J\varphi^{-1}(u) = \left|\det\left(\partial_i \varphi_j^{-1}(u)\right)\right|.$$

Preuve : $\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(\varphi(X) \in B)$

$$= \mathbb{P}(X \in \varphi^{-1}(B))$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(B)} f_X(x)\,dx \underset{x=\varphi^{-1}(u)}{=} \int_B \underbrace{f_X(\varphi^{-1}(u))\, J\varphi^{-1}(u)}_{\text{densité } f_Y(u)}\, du.$$

Retour sur l'exemple précédent :

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Lebesgue})$$

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$$
$$\omega \mapsto \omega$$

$$Y : \omega \mapsto \omega^2 - 1.$$

$$Y = \varphi(X) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = x^2 - 1.$$

$$\varphi^{-1}(u) = \sqrt{1+u}, \quad \varphi^{-1}(u)' = \frac{1}{2\sqrt{u+1}}.$$

$$\mathbb{P}_Y([a,b]) = \mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \int_a^b 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+1}}\, du \, .$$