

Variables aléatoires

1. Définitions et premières propriétés.

1.1 Variables et vecteurs aléatoires

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E toute application mesurable

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

$$\text{i.e. } \forall B \in \mathcal{E}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

- Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on parle de v.a. réelle
- Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ on dira que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire. L'application $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée la i^{e} marginale des vecteurs X .

Proposition : Soient $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une v.a. et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(E)$ tel que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$. Alors

$$X^{-1}(\mathcal{E}) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{G}))$$

En particulier pour que $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ soit $(E, \sigma(\mathcal{G}))$ mesurable il faut et il suffit que $X^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$.

Preuve : on vérifie aisément que $X(\sigma(\mathcal{G}))$ est un tribu qui contient $X^{-1}(\mathcal{G})$, alors $\sigma(X^{-1}(\mathcal{G})) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$.

Par ailleurs, la famille

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{E}, X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}))\}$$

est une tribu telle que $X^{-1}(\mathcal{T}) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}))$.

De plus $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ car $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}))$ et donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$. Ainsi:

$$X^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset X^{-1}(\mathcal{T}) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{E})).$$

En particulier, si $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$ alors $\sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est une tribu. Comme d'après plus haut

$$X^{-1}(\mathcal{E}) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{E})), \text{ la conclusion en découle. } \square$$

Remarque: La somme, le produit, le quotient, le min, max, sup, $\inf$, $\limsup$, $\liminf$ de v.a. est un v.a.

Proposition: Si (X_n) suite de v.a. $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$ ou (E, d) espace métrique. On suppose que $\forall \omega \in \Omega \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega) \in E$.

Alors $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$ est un v.a.

Preuve: il suffit de mg $\forall O \subset E$ ouvert $X^{-1}(O) \in \mathcal{F}$.

$$O \text{ ouverte } O_r = \{u \in O, d(u, E \setminus O) > \frac{1}{r}\} \quad r \in \mathbb{N}$$

$$O_r \text{ est ouvert et } \bigcup_{r \geq 1} O_r = O$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 X^{-1}(0) &= \{ \omega \in \Omega, X(\omega) \in 0 \} \\
 &= \{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \in 0 \} \\
 &= \{ \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \in \bigcup_r 0_r \} \\
 &= \{ \omega \in \Omega, \exists r, \exists m \forall n \forall n > m, X_n(\omega) \in 0_r \} \\
 &= \bigcup_{r, m} \bigcap_{n > m} X_n^{-1}(0_r) \in \mathcal{F}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Définition : on dit qu'une v.v. réelle est étagée si elle ne prend qu'un nb fini de valeurs i.e

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{avec } A_i \in \mathcal{F}.$$

Proposition : Toute v.v. réelle X est p.s. le sup de v.v. étagées. Si $X \geq 0$, on suite d'approximation peut être choisie croissante.

Preuve : Quitte à décomposer X en $X = X^+ - X^-$ on peut supposer que $X \geq 0$. On pose alors

$$A_{n,h} = \left\{ \omega, \frac{h-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{h}{2^n} \right\} \quad h \leq n 2^n$$

$$B_n = \left\{ \omega, X(\omega) > n \right\}$$

Alors
$$X_n = \sum_{h=1}^{2^n} \frac{h-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,h}}(\omega) + n \mathbb{1}_{B_n}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega). \quad \square$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition : Soit $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une v.a.
On appelle loi de X , la mesure $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{E})$, mesure image de $\mathbb{P}$ par X i.e.

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) \\ = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}).$$

$\mathbb{P}_X$ est une mesure σ probab. sur $(E, \mathcal{E})$,

$$\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X^{-1}(E)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in A_i\}\right) \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(A_i).$$

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans

$E := \left(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i\right)$ Alors la loi

$\mathbb{P}_X$ est appelée loi jointe des (X_i) , les lois

$\mathbb{P}_{X_i}$ sont appelées lois marginales. On a si

$$A \in \mathcal{E}_i, \quad \mathbb{P}_{X_i}(A) = \mathbb{P}_X(E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times A \times E_{i+1} \times \dots \times E_n).$$

Définition : On dit que deux v.a. $X, Y: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$
ont même loi si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Auquel cas, on
écrit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$ ou $X \stackrel{d}{=} Y$ ou $X \stackrel{d}{\sim} Y$.

Remarque: Si $E = \sigma(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ stable par intersection d'après le lemme de classes monotones, deux v.a. X et Y $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ ont m. loi si $IP(X \in A) = IP(Y \in A) \forall A \in \underline{\mathcal{E}}$.

Définition: Soit $X(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une v.a. On appelle atome de X (ou de sa loi) tout $x \in E$ tel que $IP_x(\{x\}) = IP(\{X=x\}) > 0$.

Définition (Support topologique): Soit $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une v.a. à valeurs dans un espace topologique. On appelle support topologique (de X , de P_X) le + petit fermé $F \subset E$ tel que $IP_X(F) = 1$.

Exemple: on jette deux dés et on fait la somme.
 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, IP probabilité uniforme i.e. si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $IP(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

On considère alors

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\{2, \dots, 12\}, \mathcal{P}(\{2, \dots, 12\}))$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2.$$

$$IP_X(\{2\}) = IP(X=2) = IP(\{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \omega_1 + \omega_2 = 2\})$$

$$= IP(\{\omega = (\omega_1, \omega_2) = (1, 1)\}) = \frac{1}{36}.$$

$$IP_X(\{3\}) = IP(X=3) = IP(\{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}) = \frac{2}{36}$$

On a alors

$$P_X = \frac{1}{36}(\delta_2 + \delta_{12}) + \frac{2}{36}(\delta_3 + \delta_{11}) + \frac{3}{36}(\delta_4 + \delta_{10}) + \frac{4}{36}(\delta_5 + \delta_9) \\ + \frac{5}{36}(\delta_6 + \delta_8) + \frac{6}{36}\delta_7$$

On vérifie bien que $\frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{36}{36} = 1$!

Exemple: Soit $X \stackrel{P}{\leftarrow} ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \rightarrow \{0,1\}^n, \mathcal{S}(\{0,1\}^n)$
 $\quad \quad \quad \downarrow \quad x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \quad \mapsto (x_1, \dots, x_n)$

i.e. X renvoie les n premières décimales de x en base 2.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ un n -uplet. Alors

$$P_X(\{\varepsilon\}) = P(\{X = \varepsilon\}) = P(\{x, x_i = \varepsilon_i \forall i=1, \dots, n\}) \\ = P\left(x \in \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]\right)$$

$$\text{i.e. } P_X(\{\varepsilon\}) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall \varepsilon \in \{0,1\}^n,$$

i.e. P_X est la loi uniforme sur $\{0,1\}^n$.

Si $i \in [1, n]$ et si $X_i(\omega) = x_i$ alors la loi marginale est une loi de proba sur $\{0,1\}$ et

$$P_{X_i}(\{0\}) = P(X_i = 0) = P_X(\{0,1\}^{i-1} \times \{0\} \times \{0,1\}^{n-i-2}) \\ = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$P_{X_i}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ i.e. P_{X_i} est la loi uniforme sur $\{0,1\}$.

Exemple : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables
 aléatoires $X_n : ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$
 $\omega \mapsto n\omega \pmod{1}$

Après si $A = [a,b] \subset [0,1]$

$$\begin{aligned} P_{X_n}(A) &= P(X_n \in A) = P(\omega \in [0,1], n\omega \pmod{1} \in [a,b]) \\ &= P(\omega \in [0,1], \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n\omega \in [a+k, b+k]) \\ &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a+k}{n}, \frac{b+k}{n}\right]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = b-a. \end{aligned}$$

ie. $\forall n \quad P_{X_n} = \lambda.$

ie toutes les variables X_n ont même loi.

On dit que la suite de v.a. est stationnaire.