

Rappeler les modes de convergence, finir la section 2.3.

Theorèmes limites

Dans tout le chapitre, on se place sur un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est définie une suite de v.v. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)

1. Loi des grands nombres (LGN)

1.1 Loi faible des grands nombres

Theorème : Soit (X_n) une suite de v.v. iid intégrables, alors

$$\frac{S_n}{n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1].$$

Preuve : on suppose d'abord que $X_i \in \mathcal{L}^2$. Soit $\varepsilon > 0$
alors comme $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}[X_1]$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) &\stackrel{\text{Tchebichev}}{\leq} \frac{\text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \text{var}(S_n) \\ &= \frac{1}{n \varepsilon^2} \text{var}(X_1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Dans le cas où $X_i \in \mathbb{L}^1$ on utilise le lemme suivant

Lemme : Si $(a_i), (b_i) \in \mathbb{C}^n$ avec $|a_i| \leq 1, |b_i| \leq 1$

alors

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Preuve : par récurrence sur n .

. si $n=1$ OK.

. si OK pour n fixé alors

$$\left| \prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i \right| \leq \overset{\leq 1}{|a_{n+1}|} \left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| + |a_{n+1} - b_{n+1}| \underbrace{\prod_{i=1}^n |b_i|}_{\leq 1}$$

$$\stackrel{\text{Hyp}}{\leq} \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| + |a_{n+1} - b_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i - b_i|.$$

□

Retour à la preuve de la loi faible des grands nombres.

Qu'il s'agit de considérer $X_i - \mathbb{E}[X_i]$, on peut supposer que $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Il suffit alors de montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \xrightarrow{p} 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a par indépendance

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \varphi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right)^n \text{ et d'après le lemme ci-dessus}$$

$$\left| \varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) - 1 \right| \leq n \left| \varphi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) - 1 \right| = t \cdot \frac{n}{t} \left| \varphi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) - 1 \right|$$

Comme $E[|X_1|] < \infty$, φ_{X_1} est dérivable en zéro avec $\varphi'_{X_1}(0) = 0$ de sorte que

$$\frac{m}{t} \left| \varphi_{X_1}\left(\frac{k}{m}\right) - 1 \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left| \varphi'_{X_1}(0) \right| = 0$$

Autrement dit $\frac{S_n}{m} \xrightarrow{p.s.} 0$, par suite $\frac{S_n}{m} \xrightarrow{P} 0$.

□

1.2 Loi forte des grands nombres

Théorème : Soit (X_n) une suite de v.a. iid intégrable
alors

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s., L^1} E[X_1].$$

Remarque : • si (X_n) iid vérifie $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} c \in \mathbb{R}$ alors $E[|X_1|] < \infty$ et $c = E[X_1]$.

En effet si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} c$ alors $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} c - c = 0$

et par Borel-Cantelli, $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$

Par suite $E[|X_1|] = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) < \infty$.

• si $X_1 \geq 0$ et $E[X_1] = +\infty$ alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} +\infty$.

de P_n or p.s

Preuve: on donne P_n preuve dans le cas où $X_i \in \mathbb{L}^2$, pour le cas \mathbb{L}^1 on renvoie au poly de JC Breton ou à P_n preuve de P_{n+1} prochain avec les martingales inverses.

On suppose donc que $X_i \in \mathbb{L}^2$ et quitte à considérer $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$ on peut supposer que $X_i \geq 0$. On a alors comme plus haut

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{var}(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

et donc

$$\sum_n \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \leq \sum \frac{\text{var}(X_1)}{n^2\varepsilon^2} < \infty.$$

D'après Borel-Cantelli, on a donc

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s}} \mathbb{E}[X_1].$$

Ensuite, pour n général on pose $q_n := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ de sorte que $q_n \leq \sqrt{n} \leq q_n + 1$ i.e. $q_n^2 \leq n \leq (q_n + 1)^2$

Comme les X_i sont positives, on a alors

$$\frac{q_n^2}{n} \frac{S_{q_n^2}}{q_n^2} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{(q_n+1)^2}}{(q_n+1)^2} + \frac{(q_n+1)}{n}$$

$$\downarrow \text{p.s}$$

$$\mathbb{E}[X_1]$$

$$\downarrow \text{p.s}$$

$$\mathbb{E}[X_1]$$

□

Remarque (orale) sur la portée philosophique de la LGV : du hasard peut naître le déterminisme !

Cela justifie la méthode scientifique ie répéter des expériences dans des conditions similaires pour avoir une idée du résultat théorique.

1.3 Applications de la LGV

Méthode de Monte-Carlo.

Si (X_i) suite iid de P ou P_x et si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, $g \in L^1$ alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P.L.L.}} \mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) P_x(dx).$$

Par exemple, si P_x est à densité f_x , on a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \approx \int g(x) f_x(x) dx.$$

- Cette méthode peut être utilisée pour approcher des intégrales. (voir TP 3)
-

Estimation paramétrique

On considère une élection type référendum au 2^e tour avec 2 issues possibles, disons A ou B.

Le résultat final est une proportion p pour A et $(1-p)$ pour B. Comment annoncer le résultat / une estimation du résultat à 20h si certains bureaux de votes ferment à 20h.

On choisit un échantillon de votants au hasard. Si cet échantillon est "bien choisi" une personne interrogée aura une proba p de voter pour A, $(1-p)$ pour B.

On note $X_i = 1$ si vote pour A
0 si vote pour B

Sur un échantillon de taille n , la proportion pour A sera alors
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}[X_i] = p.$$

Ainsi: pour n "assez grand", une estimation du paramètre inconnu p est $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$.