

Proposition: Soit  $(x_n)$  une suite de  $\mathbb{R}$  réelles et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$X_n \xrightarrow{d} X$  ss:  $F_{X_n}(t) \xrightarrow{ns} F_X(t)$  en tout pt de continuité de  $F_X$

Preuve : • D'après le lem de Portemanteau, si  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

si  $F_X$  est continue en  $t$  alors  $P(X \in \overline{B} \setminus B) = P(X = t) = 0$ .

Alors si  $X_n$  converge en loi,  $\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow{F_{X_n}''(t_1)} \mathbb{P}(X \in B) \xrightarrow{F_X(t_2)}$

- Réciproquement, supposons que  $F_{X_n} \rightarrow F_X$  par le pt de C'.

Soit  $\varphi \in C^\infty$  à support compact. Alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f'(t) dt = \int f'(t) \underbrace{1}_{f(-\infty, x)}(t) dt$$

Par Fubini, o- oblich

$$\begin{aligned} E[f(x)] &= \int f'(r) E\left[\frac{1}{f_{\infty, x}}(r)\right] dr \\ &= \int f'(r) [1 - F_x(r)] dr \end{aligned}$$

Comme l'ensemble des pt de discontinuité de  $F_X$  est au plus dénombrable, pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$  et par convergence dominée

$$\mathbb{E}[f(x_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(x)].$$

On conclut par densité de  $C_c^\infty$  dans  $C_c^0$ .



Théorème : La suite  $(X_n)$  converge en loi vers une v.a.  $X$   
 si :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t).$

Preuve : Le sens direct est immédiat car  $x \mapsto e^{itx}$  est continue bornée.

- Pour la réciproque, soit  $h \in C_c^\infty$  à support compact.  
 Alors  $\hat{g}(t) = \int e^{itx} h(x) dx$  est  $L^2$ .

En effet  $\hat{g}$  bornée et  $\hat{g}''(t)$  aussi et comme

$\hat{g}''(t) = -t^2 \hat{g}(t)$  on déduit que  $\hat{g}(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$   
 en l'infini et donc  $\hat{g} \in L^2$ . Par inversion  
 de Fourier, on a

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \hat{g}(t) dt.$$

Comme  $g$  intégrable, par Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_n)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-itX_n}] \hat{g}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_n}(t) \hat{g}(t) dt. \end{aligned}$$

Par convergence dominée on conclut que

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[g(X)].$$

On conclut par densité de  $C_c^\infty$  dans  $C_b$ .

[on passe de  $C_c^\infty$  à  $C_c^\infty$  puis de  $C_c^\infty$  à  $C^0$  par troncation].  $\square$



Théorème : Soit  $(\varphi_n)$  une suite de fonctions caractéristiques qui converge ponctuellement vers  $\varphi$  continue en zéro. Alors  $\varphi$  est une f.c. caractéristique  $\varphi > \varphi_n$  et  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$ .

Preuve : voir poly JC Breton.

Théorème (Continuous Mapping Theorem).

Soit  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$  et  $f$  continue  $\mathbb{R}^d$  p.s. alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} f(X)$$

Preuve : • Si  $f$  est continue et  $h$  continue bornée alors  $h \circ f$  est continue bornée de sorte que  $E[h \circ f(X_n)] \rightarrow E[h \circ f(X)]$  i.e.  $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} f(X)$

- Si  $f$  est seulement continue  $\mathbb{R}^d$  p.s. on utilise le lemme de Portmanteau

## 2. Articulation des modes de convergence

### 2.1 Convergence p.s. et en proba.

Lemme : Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} X$  alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$ .



Preuve : on a vu que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.S} X$  ssi  $\forall \varepsilon > 0$

$$IP\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

$$\text{ie } IP\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

décroissant en  $n$

$$\text{ie } \lim_{n \rightarrow \infty} IP\left(\bigcup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\text{de sorte que } \lim_{n \rightarrow \infty} IP(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

$$\text{ie } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X.$$

Lemme : Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$  alors il existe une sous-suite  $(n_k)_{k \geq 1}$  telle que  $X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{P.S} X$ .

Preuve : Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $n_k$  le plus petit entier tel que  $IP(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$ .

Par le lemme de Borel-Cantelli, on a

$$IP\left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) = 0$$

ie pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\exists p_0(\omega)$  tel que  $\forall k \geq p_0(\omega)$   
 $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}$  d'où  $X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{P.S} X$ .  $\square$ .



## 2.2 Convergence $L^p$ , p.s et proba.

Lemme: Si  $X_n \xrightarrow[p.s]{p.s} X$  et  $|X_n| \leq Y \in L^1$  alors  $X_n \xrightarrow[n.s]{L^1} X$ .

Preuve: c'est la convergence dominée!  $\square$

Lemme: Si  $X_n \xrightarrow[n.s]{L^p} X$  alors  $X_n \xrightarrow[n.s]{IP} X$

Preuve: Soit  $\varepsilon > 0$ , par l'inégalité de Markov

$$IP(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|]}{\varepsilon} \xrightarrow[n.s]{} 0$$

Définition: On dit que famille de v.a.  $(X_i)_{i \in I}$  est uniformément intégrable (u.i) si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} E\left[|X_i| \mathbb{1}_{\frac{|X_i|}{|X_i|} > m}\right] = 0$$

Exemple: si  $(X_i)$  est bornée dans  $L^p$  avec  $p > 1$  alors  
i.e.  $\sup_{i \in I} E[|X_i|^p] < \infty$  alors par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} E\left[|X_i| \mathbb{1}_{\frac{|X_i|}{|X_i|} > m}\right] &\leq E[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}} IP(|X_i| > m)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sup_{i \in I} E[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}}\right) \left(\frac{E[|X_i|]}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{i \in I} E[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{i \in I} E[|X_i|]\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \frac{1}{m^{\frac{1}{q}}} \\ &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \text{ unif. en } i \in I. \end{aligned}$$

Exemple: si  $|X_i| \leq Y$  avec  $Y \in L^1$  alors  
 $\sup_{i \in I} E\left[|X_i| \mathbb{1}_{\frac{|X_i|}{|X_i|} > m}\right] \leq E\left[Y \mathbb{1}_{\frac{Y}{Y} > m}\right] \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$  (dominée)



Proposition : La famille  $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$  est U.I. si :

- $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$  est bornée dans  $\mathbb{L}^1$  i.e.  $\sup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{E}[|X_i|] < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$  t.q. si  $\mathbb{P}(A) < \delta$  alors  
$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

Preuve : voir TD

Proposition : Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. intégrables. Alors il y a équivalence entre

1)  $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$

2)  $(X_n)_{n \geq 1}$  est U.I. et  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ .

Preuve :

1)  $\Rightarrow$  2) On a vu que  $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ , il reste à voir que  $(X_n)$  est U.I. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n \gg 1$  t.q.  
 $\forall n \geq n_0 \quad \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon/2$ . Alors si  $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] &\leq \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] \\ &\leq \varepsilon/2 + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

Comme  $(|X|)$  est U.I.,  $\exists \eta$  t.q.  $\mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] < \varepsilon/2$   
alors  
$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad (X_n) \text{ est U.I.}$$



2)  $\Rightarrow$  1) Comme  $X_n \xrightarrow{P} X$ , on peut extraire une suite  
 telle que  $X_{n_k} \xrightarrow{p.s.} X$ . D'après le Lemme de Fatou, on a

$$E[|X|] = E\left[\liminf_{k \rightarrow \infty} |X_{n_k}|\right] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E[|X_{n_k}|] \leq \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

donc  $X \in L^1$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on a alors

$$\begin{aligned} E[|X_n - X|] &= E\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] + E\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}\right] \\ &\leq E\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] + \varepsilon \\ &\leq E\left[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] + E\left[|X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $(X_n) \cup \{X\}$  est u.i. et q-c  $IP(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 il existe  $n$  assez grand de sorte que

$$E[|X_n - X|] \leq 3\varepsilon \quad \text{i.e.} \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$



## 2.3 Convergence en Poi. et autres modes

Lemme: Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  alors  $X_n \xrightarrow{L} X$ .

Preuve: Soit  $t \in \mathbb{R}$  alors pour  $\varepsilon < 1$

$$|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX_n}] - \mathbb{E}[e^{itX}]|$$

$$\leq |t| \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 2]$$

$$= |t| \mathbb{E}\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| < \varepsilon}\right] + 2|t| \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\leq |t| \varepsilon + 2|t| \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq |t| \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \square$$

Corollaire: Si  $X_n \xrightarrow{P, L, P} X$  alors  $X_n \xrightarrow{L} X$ .

Lemme: si  $X_n \xrightarrow{L} c$  constante alors  $X_n \xrightarrow{P} c$ .

Preuve: Soit  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon)$$

$$\leq F_{X_n}(c - \varepsilon) + 1 - F_{X_n}(c + \varepsilon).$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_c(c - \varepsilon) + 1 - F_c(c + \varepsilon) = 0$$

car  $F_c(t) = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}(t)$  continue en  $c - \varepsilon$  et  $c + \varepsilon$ .