

Convergence de variables aléatoires

1. Différents modes de convergence

On commence par énoncer/rappeler le lemme de Borel-Cantelli:

Lemme: Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de proba et (A_n) une suite d'événements. Alors

- Si $\sum_n P(A_n) < \infty$ alors $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$
- Si les A_n sont mutuellement indépendants et $\sum_n P(A_n) = \infty$ alors $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$

Preuve: On rappelle que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k$
Ainsi: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k \geq m} A_k)$ (décroît en m)

- Si $\sum_n P(A_n) < \infty$ alors $P(\bigcup_{k \geq m} A_k) \leq \sum_{k \geq m} P(A_k) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$
donc $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$

- Réciproquement, si les A_i sont mutuellement indép, alors

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)^c &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = P(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{k \geq m} A_k^c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P(\bigcap_{k \geq m} A_k^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k \geq m} P(A_k^c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k \geq m} (1 - P(A_k)) \end{aligned}$$

(croît en m)

$$\text{On } \log \prod_{k \geq n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) = \sum_{k \geq n} \log(1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$\leq - \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) = -\infty$$

$\log(1-n) \leq -n$
si $n \in [0,1]$

□

1.1 Convergence presque sûre

Définition : On dit qu'une suite (X_n) de v.v. converge presque sûre vers une v.v. X et on note $X_n \xrightarrow[p.s.]{} X$ si :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Remarque : • Possible

$A = \{\omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ est bien mesurable car

$$\text{il s'écrit : } A = \bigcap_{p \geq 1} \underbrace{\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} \left\{ |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{p} \right\}}_{\text{décroissant en } p}$$

• Par monotonie, on a alors :

$$X_n \xrightarrow[p.s.]{} X \Leftrightarrow \forall p \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} |X_k - X| \leq \frac{1}{p}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} |X_k - X| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Corollaire : Soit $(X_n), X$ des variables aléatoires.

- Si $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$
- Si les (X_n) sont mutuellement indép alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \sum \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$.

Preuve : • pour le premier point c'est le premier point du lemme de Borel-Cantelli:

- pour le second point, c'est encore Borel-Cantelli.
On note qu'il est nécessaire de supposer $X = 0$ car sinon les $(X_n - X)$ ne sont pas indép.

Proposition : Soit $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et f une fonction continue alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

Preuve : par continuité de f , $f(X_n(\omega)) \rightarrow f(X(\omega))$ dès lors que $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$, ainsi : $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = f(X)) \geq \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$.

1.2 Convergence en probabilité

Définition : On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Proposition (unicité de la limite)

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X=Y$ p.s

Preuve : pour $p \geq 1$, on remarque que

$$\{ |X-Y| > \frac{1}{p} \} \subset \{ |X_n - X| > \frac{1}{2p} \} \cup \{ |X_n - Y| > \frac{1}{2p} \}$$

de sorte que

$$P(|X-Y| > \frac{1}{p}) \leq P(|X_n - X| > \frac{1}{2p}) + P(|X_n - Y| > \frac{1}{2p})$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

i.e. $P(|X-Y| > \frac{1}{p}) = 0 \quad \forall p \geq 1$. Par suite

$$P(X \neq Y) = P\left(\bigcup_{p \geq 1} |X-Y| > \frac{1}{p}\right) = 0.$$

Proposition : Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et f est continue alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Preuve : f est uniformément continue sur les compacts.

Soit $\varepsilon > 0$, $a > 0$. $\exists \eta$ tel $|u| \leq a$, $|u-v| < \eta$

$\Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$. Ainsi on peut se

comporter

$$\{ |f(X_n) - f(X)| > \varepsilon \} \subset \{ |X| > a \} \cup \{ |X_n - X| > \eta \}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) \leq P(|X| > a) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \eta)$$

$\downarrow$
 0

En faisant tendre $a \rightarrow \infty$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) = 0 \quad \square.$$

Remarque Si on pose $d_p(X, Y) = E[|X - Y| \wedge 1]$

alors $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow d_p(X_n, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Autrement dit, la distance d_p mesure la convergence en proba. L'espace $(L^0(\Omega, \mathcal{F}, P), d_p)$ est un espace métrique co-plète.

1.3 Convergence L^p

Définition : Soit $p \geq 1$. On dit que (X_n) converge dans L^p vers X et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

Remarque : par l'inégalité de Hölder si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$ pour $q < p$.

1.4 Convergence en P

Définition : On dit que (X_n) converge en P vers X et on note $X_n \xrightarrow{P} X$ si $\forall f$ continue bornée

$$E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)].$$

Remarque cela revient à dire que P_{X_n} converge étroitement vers P_X . La convergence en P concerne "les P 's" des variables et surtout leur P !

Lemme (Portmanteau)

On a équivalence entre

1) $X_n \xrightarrow{d} X$

2) $\forall F$ fermé $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$

3) $\forall O$ ouvert $\limsup_n \mathbb{P}(X_n \in O) \leq \mathbb{P}(X \in O)$

4) $\forall B$ borélien $\mathbb{P}(X \in \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$

Preuve:

- 1) $\Rightarrow$ 2) Si F fermé, on considère $f_F(x) = \frac{1}{(1 + d(x, F))^2}$
continue bornée par 1 avec $f_F \downarrow \mathbb{1}_F$. Alors

$$\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in F) = \liminf_n \int \mathbb{1}_F(u) \mathbb{P}_{X_n}(du) \leq \liminf_n \int f_F(u) \mathbb{P}_{X_n}(du)$$

$$\mathbb{P}(X \in F) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_F(X)] \stackrel{1)}{=} \liminf_n \mathbb{E}[f_F(X_n)]$$

- 2) $\Rightarrow$ 3) par passage au complémentaire

- 2) + 3) $\Rightarrow$ 4) On a $\overset{\circ}{B} \subset B \subset \bar{B}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in \overset{\circ}{B}) &\leq \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in \overset{\circ}{B}) \leq \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in B) \leq \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in \bar{B}) \\ &\leq \limsup_n \mathbb{P}(X_n \in \bar{B}) \leq \mathbb{P}(X \in \bar{B}) \end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(X \in \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}) = 0$, on a $\mathbb{P}(X \in B) = \liminf_n \mathbb{P}(X_n \in B) = \limsup_n \mathbb{P}(X_n \in B)$.

- 4) $\Rightarrow$ 1) Soit f continue bornée, qu'il s'agit de transporter/distribuer

on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$ Alors $a \leq \mathbb{P} \leq b$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^1 \mathbb{P}(f(X) > t) dt$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^1 \mathbb{P}(f(X_n) > t) dt$$

$$x \in f^{-1}([t, 1])$$

$$P(f(x) > t) = P(x \in \underbrace{f^{-1}([t, +\infty[)}_B)$$

$$\bar{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{f^{-1}([t, +\infty[)} \setminus f^{-1}([t, +\infty[)$$

$P(x \in \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}) \leq P(f(x) = t) = 0$ sauf pour un ensemble D_0 au plus dénombrable de t .

• De même $P(x_n \in \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B}) = 0$ sauf pour un ensemble D_n au plus dénombrable de t .

• Ainsi: $\bigcup_{n \geq 0} D_n$ est au plus dénombrable et par $t \notin \bigcup_{n \geq 1} D_n$

$$P(f(x_n) > t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(f(x) > t).$$

Par convergence dominée on a alors

$$E[f(x_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[f(x)].$$

□