Espace de probabilités

Introduction

- La théorie des probabilités remonte au 17^e et a été formellement conceptualisée au début du 20^e. Il s'agit à l'origine de modéliser mathématiquement des phénomènes complexes dont le résultat ne peut être prédit par avance, ou dont la modélisation déterministe est trop complexe pour être mise en oeuvre pratiquement.
- Exemples : lancer de dé, mesure quantique
trajectoire d'une particule dans un gaz, un liquide ...

Au lieu de se focaliser sur une issue possible de l'expérience, on considère l'ensemble des résultats possibles et on leur alloue un "poids" selon qu'ils sont + ou - probables.

- La théorie des probabilités est toujours largement utilisée pour modéliser des phénomènes concrets mais c'est aussi une théorie mathématique autonome qui a des interactions profondes avec de nombreuses branches des mathématiques : l'analyse, l'algèbre, la géométrie...

1. Espace de probabilités.

L'objet de base de la théorie est la notion d'espace de probabilité. C'est la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

où

* Ω est un ensemble, appelé univers des possibles.
Moralement, Ω représente l'ensemble des résultats possibles de l'expérience que l'on cherche à modéliser

Exemple : lancer de dé $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$
lancer de pièce $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ ou $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}, \text{tranche}\}$
trajectoire d'une particule de pollen $\Omega = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$

* $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, i.e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ les parties de Ω

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés événements
Moralement, ce sont les ensembles à qui on souhaite être capable d'allouer un poids, "une probabilité".

Exemple : tribu triviale $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
tribu totale $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

. Si Ω est au plus dénombrable, on choisira le + sot $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
. Si Ω est un espace métrique, on considérera la tribu borélienne.
ex : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $((C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3), \|\cdot\|_\infty), \mathcal{B})$.

Rappel : Une intersection (quelconque) de tribus est une tribu. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ tribu} \subset \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, on dit que c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

* **$\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$**

Définition : on dit qu'une mesure positive $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une mesure de probabilité si $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifie

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événements avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $m \neq n$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

(σ- additivité)

Exemple :
- $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ mesure de Lebesgue.
- $(\Omega, \mathcal{T}, \delta_a)$ avec $a \in \Omega$ et δ_a mesure de Dirac
- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ avec $\mu(dx) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$
- $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_s)$ avec $\mu_s = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \Big(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \delta_n \Big)$, $s > 1$.
- $\Big(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{T}_i, \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}_i \Big)$ espace produit...

2. Propriétés élémentaires et opérations ensemblistes

En terme probabiliste, une union s'interprète comme un "ou", ou un "il existe" ; une intersection comme un "et" ou un "pour tout".

<u>Proposition</u> : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A, B, (A_n)_{n \geq 0}$ des événements

1) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

2) Si $B \subset A$, $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

3) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

4) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_m)$

5) Si (A_n) est croissante ie $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \lim_{n \infty} \mathbb{P}(A_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

6) Si (A_n) est décroissante, i.e $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \lim_{n \infty} \mathbb{P}(A_n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_m)$$

<u>Preuve</u> : 1) $A \cup B = A \setminus (A \cap B) \sqcup B \setminus (A \cap B) \sqcup (A \cap B)$

et $A = (A \cap B) \sqcup A \setminus (A \cap B)$, $B = (B \cap A) \sqcup B \setminus (A \cap B)$

Ainsi : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B))$; $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B)$

En combinant $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2) Voir 1).

3) $\Omega = A \sqcup A^c$ donc $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

4) D'après 1) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Par récurrence on obtient alors
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_1^n \mathbb{P}(A_k).$$
Pour passer à la limite, on utilise le point 5).

5) Si (A_n) est croissante, en posant $A_{-1} = \emptyset$ on a
$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=0}^{n} A_k \setminus A_{k-1} \quad \text{(union disjointe!)}$$
Ainsi: $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1})$ et
$$\lim_{n\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1})$$
$$\overset{\sigma\text{ add}}{=} \mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k \setminus A_{k-1}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big)$$

6) Découle de 5) en passant au complémentaire.

$\square$

<u>Définition</u> : Si (A_n) suite d'événements, on pose
$$\underline{\lim_{n\infty}} A_n = \liminf_{n\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$$
$$\overline{\lim_{n\infty}} A_n = \limsup_{n\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

<u>Remarque</u> : $\omega \in \underline{\lim_{n\infty}} A_n \iff \exists n \geq 1, \forall k \geq n, \omega \in A_k$
i.e « à partir d'un certain rang, tous les A_n sont réalisés ».
$\omega \in \overline{\lim_{n\infty}} A_n \iff \forall n \geq 1, \exists k \geq n, \omega \in A_k$
i.e « une infinité de A_n est réalisée » ou encore « les A_n sont réalisés infiniment souvent ».

Rappels : Si (x_n) est une suite réelle, on a par définition

$$\underline{\lim_{n\infty}}\, x_n = \liminf_{n\infty} x_n := \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} x_k$$

$$\overline{\lim_{n\infty}}\, x_n = \limsup_{n\infty} x_n := \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} x_k$$

Proposition : Soit (A_n) une suite d'événements, on a

$$\underline{\lim_{n\infty}}\, \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\underline{\lim}_{n\infty} A_n} \quad ; \quad \overline{\lim_{n\infty}}\, \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\overline{\lim}_{n\infty} A_n}$$

Preuve: par passage au complémentaire, on peut se restreindre au cas de la limsup. On a les équivalences:

$$\begin{aligned}
\omega \in \overline{\lim_{n\infty}}\, A_n &\iff \forall n \geq 0,\ \exists k \geq n,\ \omega \in A_k \\
&\iff \forall n \geq 0,\ \exists k \geq n,\ \mathbb{1}_{A_k(\omega)} = 1 \\
&\iff \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k(\omega)} = 1 \\
&\iff \limsup_{n\infty} \mathbb{1}_{A_k(\omega)} = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Définition : Une suite (A_n) d'événements est dite convergente si

$$\underline{\lim_{n\infty}}\, A_n = \overline{\lim_{n\infty}}\, A_n$$

auquel cas la limite commune est notée $\lim_{n\infty} A_n$.

<u>Proposition</u> : Soit (A_n) une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\infty} A_n) \leq \liminf_{n\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\infty} A_n)$$

En particulier, si (A_n) est convergente, on a

$$\mathbb{P}(\lim_{n\infty} A_n) = \lim_{n\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

<u>Preuve</u> : voir TD.

3. Complétion et prolongement de mesures

3.1 Ensembles négligeables, tribu complétée.

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fixé.

<u>Définition</u> : Un ensemble $N \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est dit négligeable, s'il existe $A \in \mathcal{F}$ avec $N \subset A$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.

On dira que deux ensembles A et B coincident presque sûrement si $A \Delta B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$ est négligeable.

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}(\Omega)$ l'ensemble des parties négligeables. Alors

i) $\emptyset \in \mathcal{N}$

ii) Si $B \subset A$ et $A \in \mathcal{N}$ alors $B \in \mathcal{N}$

iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{N}$

iv) Si $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{N}^{I}$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{N}$.

Preuve : i) ii) sont clairs.

iii) Si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ alors $\forall n \geq 0, \exists C_n \in \mathcal{F}$ tq $A_n \subset C_n$, $\mathbb{P}(C_n) = 0$ Alors

$\bigcup_{n\geq 0} A_n \subset \bigcup_{n\geq 0} C_n$ et $\bigcup_{n\geq 0} C_n \in \mathcal{F}$ et

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} A_n\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} C_n\Big) \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(C_n) = 0.$$

iv) Si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{N}^I$ alors si $i_0 \in I$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_0} \subset C_{i_0} \in \mathcal{F}$$

avec $\mathbb{P}(C_{i_0}) = 0$.

<u>Définition</u> : On appelle tribu complétée de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathbb{P}$ la tribu $\widetilde{\mathcal{F}} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$

<u>Proposition</u> : On a les équivalences

i) $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$

ii) $\exists B, C \in \mathcal{F}^2$, $B \subseteq A \subseteq C$ et $\mathbb{P}(C \setminus B) = 0$

iii) $\exists B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}$ tq $A = B \cup N$

iv) $\exists B \in \mathcal{F}$, $A = B$ presque partout i.e $A \Delta B \in \mathcal{N}$

<u>Preuve</u> :

ii) $\Rightarrow$ iii) . Si $\exists (B,C) \in \mathcal{F}^2$, $B \subseteq A \subseteq C$ et $\mathbb{P}(C\setminus B) = 0$ alors $A = B \cup (A \setminus B)$ avec $B \in \mathcal{F}$ et $A\setminus B \subseteq C \setminus B$ et $\mathbb{P}(C\setminus B) = 0$ ie $A\setminus B \in \mathcal{N}$

iii) $\Rightarrow$ iv) Si $\exists\, B, N \in \mathcal{F}' \times \mathcal{N}$ tq $A = B \cup N$ alors
$A \Delta B = (B \cup N) \setminus B \subset N \in \mathcal{N}$ donc $A = B$ p.s.

iv) $\Rightarrow$ ii) Si $\exists B \in \mathcal{F}'$ et $A \Delta B \in \mathcal{N}$, $\exists D \in \mathcal{F}'$ tq
$A \Delta B \subset D$ et $\mathbb{P}(D) = 0$.
On pose $B' = \underbrace{B \cap D^c}_{\in \mathcal{F}'}$ et $C' = \underbrace{B \cap D}_{\in \mathcal{F}'}$.

On a alors $B' \subseteq A \subseteq C'$ et $\mathbb{P}(C' \setminus B') = \mathbb{P}(D) = 0$.

iii) $\Rightarrow$ i) On va montrer que
$T = \{ A \in \tilde{\mathcal{F}'}, \ \exists B, N \in \mathcal{F} \times \mathcal{N}$ tq $A = B \cup N \}$
est une tribu qui coïncide avec $\tilde{\mathcal{F}'}$.

- $\Omega \in T$ car $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ avec $\Omega \in \mathcal{F}'$ et $\emptyset \in \mathcal{N}$
- Si $A \in T$, avec $A = B \cup N$, $N \subset D \in \mathcal{F}'$, $\mathbb{P}(D) = 0$
alors $A^c = B^c \cap N^c = \underbrace{(B^c \cap D^c)}_{\in \mathcal{F}'} \cup \underbrace{(B^c \cap N^c \cap D)}_{\in \mathcal{N} \text{ car inclus dans } D}$

i.e $A^c \in T$.
- Si $(A_n) \in T$, $A_n = B_n \cup N_n$, $B_n \in \mathcal{F}'$, $N_n \in \mathcal{N}$
alors $\bigcup_n A_n = \underbrace{(\bigcup B_n)}_{\in \mathcal{F}'} \cup \underbrace{(\bigcup N_n)}_{\in \mathcal{N}} \in T$

Ainsi T est bien une tribu et par définition $T \subset \tilde{\mathcal{F}'}$.
Par ailleurs, $\mathcal{F}' \subset T$ et $\mathcal{N} \subset T$ (cf définition)
de sorte que $\mathcal{F}' \cup \mathcal{N} \subset T$. Par minimalité

$\tilde{\mathcal{F}'} := \sigma(\mathcal{F}' \cup \mathcal{N}) \subset T$

□

Proposition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba et $\tilde{\mathcal{F}}$ la tribu complétée par rapport à $\mathbb{P}$. Alors

$$\tilde{\mathbb{P}} : \left| \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & [0,1] \\ A = B \cup N & \longmapsto & \mathbb{P}(B) \end{array} \right.$$

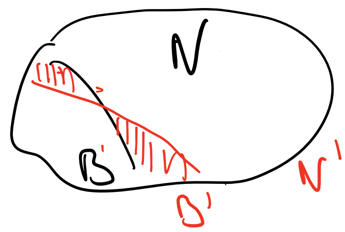
est bien définie et est l'unique extension de $\mathbb{P}$ à $\tilde{\mathcal{F}}$ i.e. $\tilde{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}} = \mathbb{P}$.

Preuve : • $\tilde{\mathbb{P}}$ est bien définie

Si $A \in \tilde{\mathcal{F}}$ s'écrit $A = B \cup N = B' \cup N'$ alors

Comme $B \Delta B' \subset N \cup N'$, $\mathbb{P}(B \Delta B') = 0$ ie

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B')$



• $\tilde{\mathbb{P}}$ est une proba

- $\tilde{\mathbb{P}}(\emptyset) = 0$
- Si $(A_n) \in \tilde{\mathcal{F}}^{\mathbb{N}}$ disjoints, $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{F}$, $N_n \in \mathcal{N}$

  et $\bigcup_n A_n = \left(\bigcup B_n\right) \cup \left(\bigcup N_n\right)$

  et $\tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup B_n\right) = \sum_0^\infty \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=0}^\infty \tilde{\mathbb{P}}(A_n)$

• Si $\tilde{\mathbb{Q}}$ est une autre extension et $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{N}$ ie $N \subset D$ et $\mathbb{P}(D) = 0$. Alors

$B \subset A \subset B \cup D$ donc

$$\tilde{\mathbb{P}}(B) = \tilde{\mathbb{Q}}(B) \leq \tilde{\mathbb{Q}}(A) \leq \tilde{\mathbb{Q}}(B) + \tilde{\mathbb{Q}}(D) = \underbrace{\tilde{\mathbb{P}}(B) + \tilde{\mathbb{P}}(D)}_{\text{car } B \text{ et } D \in \mathcal{F}} = \tilde{\mathbb{P}}(B),$$

donc $\tilde{\mathbb{Q}}(A) = \tilde{\mathbb{P}}(B) = \tilde{\mathbb{P}}(A)$. □

Proposition : L'ensemble $\tilde{\mathcal{N}}$ des parties $\tilde{\mathbb{P}}$ négligeables coïncide avec $\mathcal{N}$.

Preuve : par définition de $\tilde{\mathbb{P}}$, on a $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$.
Soit $N \in \tilde{\mathcal{N}}$, ie $\exists D \in \tilde{\mathcal{F}}$ tq $N \subset D$, $\tilde{\mathbb{P}}(D) = 0$.
Alors $\exists B, N'$ tq $D = B \cup N'$ avec $B \in \mathcal{F}$, $N' \in \mathcal{N}$
et $0 = \tilde{\mathbb{P}}(D) := \mathbb{P}(B)$ donc $B \in \mathcal{N}$.
En conclusion $N \subset D = B \cup N' \in \mathcal{N}$ donc $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ d'où le résultat.

3.2 Lemme des classes monotones

On rappelle à présent un autre procédé d'extension classique.

Définition : Une famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si
- $\Omega \in \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ est stable par différence : si $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable croissante :
  si $(A_n) \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Remarque : • une intersection de classes monotones est une classe monotone. On peut donc considérer la classe monotone engendrée par une partie $\mathcal{A}$: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\text{classe } \mathcal{M} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M}$

- une tribu est une classe monotone ($B \setminus A = B \cap A^c$).
- une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.

<u>Théorème</u> : (lemme des classes monotones)

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une famille stable par intersection finie i.e. $\mathcal{A}$ est un π-système. Alors $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

<u>Preuve</u> : On commence par remarquer que $\sigma(\mathcal{A})$ est une tribu, donc une classe monotone, qui contient $\mathcal{A}$, elle contient donc la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{A}$, i.e $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$.

Pour l'inclusion réciproque, on va montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par intersection, ce qui assurera que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une tribu. On introduit

$$\mathcal{M}_1 = \{ A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ \forall B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \}.$$

Comme $\mathcal{A}$ est un π système (hypothèse), on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$.
Par ailleurs $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone car

- $\Omega \in \mathcal{M}_1 \to$ si $B \in \mathcal{A}$, $\Omega \cap B = B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.
- stabilité par différence : soit $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_1$, $A_1 \subset A_2$.
  Si $B \in \mathcal{A}$, on a $(A_2 \setminus A_1 \cap B) = \underbrace{\underbrace{(A_2 \cap B)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{A})} \setminus \underbrace{(A_1 \cap B)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{A})}}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \text{ car stable par différence}}$

  ie $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{M}_1$
- stabilité par union croissante : soit $(A_n) \uparrow \in \mathcal{M}_1^{\mathbb{N}}$ et $B \in A$
  alors $(\bigcup_n A_n) \cap B = \bigcup_n \underbrace{(A_n \cap B)}_{\in \mathcal{M}(A)} \in \mathcal{M}(A)$ ie $(\bigcup A_n) \in \mathcal{M}_1$

$\mathcal{M}_1$ est donc une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$ donc

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_1$$

mais par définition $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}(A)$ donc $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(A)$.

- On pose alors

$$\mathcal{M}_2 = \{ A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ \forall B \in \underline{\mathcal{M}(\mathcal{A})},\ A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \}.$$

Comme plus haut, on vérifie que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone. Par ailleurs, $\mathcal{M}_2$ contient $\mathcal{A}$. En effet, si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_1$, par définition de $\mathcal{M}_1$ on a

$$A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Ainsi on a $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_2$ mais par définition, on a aussi $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ie $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Ceci montre que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par intersection, c'est donc une tribu et $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

$\square$

<u>Proposition</u> : Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui coïncident sur un ensemble $\mathcal{A}$ stable par intersection. Alors $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$.

<u>Preuve</u> : Soit $\mathcal{M} = \{ A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A) \}$.

On vérifie facilement que $\mathcal{M}$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$ ie $\underset{\sigma(\mathcal{A})}{\mathcal{M}(\mathcal{A})} \subset \mathcal{M}$.

classe monotone

$\square$

Exemple : Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui coincident sur les demi-droites ie

$$\mu(]-\infty, x]) = \nu(]-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Alors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Théorème : Soit H un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur Ω et $\mathcal{A}$ un π-système contenant Ω.

On suppose que

1). $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A \in H$

2). Si (f_n) suite croissante de fonctions positives de H converge vers f, alors $f \in H$.

Alors H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{A})$ mesurables.