Loi forte des grands nombres

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce contexte et si X_0 est intégrable, la loi (forte) des grands nombres de Kolmogorov (LGN) assure la convergence presque sûre des moyennes empiriques vers la moyenne théorique au sens où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \mathbb{E}[X_0], \quad p.s.$$

On donne ci-dessous une preuve de la LGN basée sur la preuve du théorème ergodique donnée dans [HK95].

Démonstration de la LGN. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[Y_0] < 0$. On désigne par

$$\mathcal{F}_Y^\infty := \bigcap_{n\geq 0} \sigma(Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots)$$

la tribu asymptotique et on remarque que pour tout $n \geq 0$, la tribu $\sigma(Y_k,\, 0 \leq k \leq n)$ est indépendante de $\mathcal{F}_Y^\infty$. Pour $n \geq 1$, on introduit les suites des maxima des sommes partielles

$$G_n := \max\left\{Y_0, Y_0+Y_1, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} Y_k\right\}, \quad H_n := \max\left\{Y_1, Y_1+Y_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} Y_k\right\}.$$

On remarque alors que

$$G_{n+1} = Y_0 + \max\left\{0, Y_1, Y_1+Y_2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} Y_k\right\} = Y_0 + \max\{0, H_n\}$$

de sorte que

$$G_{n+1} - H_n = Y_0 - \min\{0, H_n\}.$$

Les suites (G_n) et (H_n) sont naturellement croissantes de sorte que $G_{n+1} - H_n$ est décroissante. Considérons l'évènement asymptotique $A := \{\omega \in \Omega,\, \sup_{n\geq 1} H_n(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{F}_Y^\infty$. Sur A la suite $(G_{n+1} - H_n)$ décroît vers Y_0. Par convergence monotone et comme Y_0 est indépendante de $\mathcal{F}_Y^\infty$, on a donc

$$\mathbb{E}[(G_{n+1} - H_n)\mathbb{1}_A] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Y_0\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y_0] \times \mathbb{P}(A).$$

Par ailleurs, comme la suite (Y_n) est i.i.d et par indépendance de $\sigma(Y_k,\, 0 \leq k \leq n)$ et $\mathcal{F}_Y^\infty$, les vecteurs aléatoires

$$(Y_0, Y_0+Y_1, \ldots, Y_0+\ldots+Y_{n-1}, \mathbb{1}_A) \quad \text{et} \quad (Y_1, Y_1+Y_2, \ldots, Y_1+\ldots+Y_n, \mathbb{1}_A)$$

ont même loi, en particulier $(G_n, \mathbb{1}_A)$ et $(H_n, \mathbb{1}_A)$ ont même loi, de sorte que $\mathbb{E}[H_n\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[G_n\mathbb{1}_A]$. Par suite, comme (G_n) est croissante, on déduit que

$$0 \leq \mathbb{E}[(G_{n+1} - G_n)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[(G_{n+1} - H_n)\mathbb{1}_A] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Y_0] \times \mathbb{P}(A).$$

Comme $\mathbb{E}[Y_0] < 0$, cela impose que $\mathbb{P}(A) = 0$, autrement dit pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a $\sup_{n\geq 1} H_n(\omega) < +\infty$ et par suite

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_k(\omega) \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{H_n(\omega)}{n} = 0.$$

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est suite de variables aléatoires i.i.d intégrables et si $\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0+\infty[$, on peut appliquer le résultat précédent à la suite $Y_k^\varepsilon := X_k - \mathbb{E}[X_k] - \varepsilon$ qui vérifie bien $\mathbb{E}[Y_k^\varepsilon] = -\varepsilon < 0$. Comme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Y_k^\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k - \mathbb{E}[X_0] - \varepsilon,$$

on obtient alors que pour presque tout $\omega \in \Omega$ (le presque tout dépend de ε)

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) \leq \mathbb{E}[X_0] + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro (dans $\mathbb{Q}$), on conclut que pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) \le \mathbb{E}[X_0].$$

En appliquant le même raisonnement à la suite $(-X_n)$, on obtient finalement que pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) = \mathbb{E}[X_0].$$

$\square$

Références

[HK95] Hasselblatt, B., Katok, A., Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1995.