

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU CC # 2

Durée : 1h00, documents interdits.

Exercice 1 (Lois stables).

On considère une variable aléatoire réelle symétrique non nulle X , autrement dit X a même loi que $-X$. On suppose par ailleurs que X est α -stable, pour un réel $0 < \alpha \leq 2$, ce qui signifie que si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des copies indépendantes de X , alors pour tout $n \geq 1$, on a l'égalité en loi

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{\text{loi}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X.$$

1. Écrire une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction caractéristique φ_X de X .

De l'équation en loi, comme les variables X_i sont i.i.d., on déduit l'équation fonctionnelle, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_X(t)^n = \varphi_X(n^{\frac{1}{\alpha}}t), \quad \text{i.e.} \quad \varphi_X\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^n = \varphi_X(t).$$

2. En déduire que pour tout couple d'entiers $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_X\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \varphi_X(1)^{\frac{p}{q}}$.

En appliquant les relations ci-dessus avec $n = q$ et $t = p^{1/\alpha}$ à droite, puis $n = p$ et $t = 1$ à gauche, on déduit effectivement

$$\varphi_X\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \varphi_X(1)^{\frac{p}{q}}.$$

3. En conclure qu'il existe $c > 0$ tel que $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

La relation ci-dessus étant vérifiée pour tout p, q et la fonction caractéristique étant continue, on conclut que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_X\left(t^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \varphi_X(1)^t, \quad \text{i.e.} \quad \varphi_X(t) = \varphi_X(1)^{t^\alpha}.$$

En posant $\varphi_X(1) = e^{-c}$ et en se rappelant que φ_X est paire car X est symétrique, on obtient le résultat désiré. Pour se convaincre que $\varphi_X(1)$ est bien de la forme e^{-c} avec $c > 0$, on peut revenir à l'équation

$$\varphi_X\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^n = \varphi_X(1),$$

se rappeler que φ_X est réelle car X est symétrique et de plus φ_X est non constante égale à un au voisinage de zéro, car X est non-nulle. Pour n assez grand, on a donc $\varphi_X(1/n^{1/\alpha}) < 1$, d'où le résultat.

4. Question bonus : si X est une variable symétrique non nulle telle que $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ pour $\alpha, c > 0$, montrer que X est α -stable et que l'on a nécessairement $0 < \alpha \leq 2$.

Si $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ et si X_i sont des copies indépendantes de X , on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = e^{-cn|t|^\alpha} = \varphi_X(n^{1/\alpha}t)$$

et comme les fonctions caractéristiques caractérisent la loi, il vient

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{\text{loi}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X.$$

Par ailleurs, si on avait $\alpha > 2$ on développement limité de φ_X au voisinage de zéro donnerait

$$\varphi_X(t) = 1 + o(|t|^\alpha),$$

ce qui impliquerait que $\mathbb{E}[X] = 0$ et surtout $\mathbb{E}[X^2] = 0$, d'où $X = 0$ presque sûrement ce qui est exclu par hypothèse.

Exercice 2 (Séries aléatoires).

On considère deux suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires, toutes indépendantes et de loi respectives

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, on pose alors $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n := \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. Via un lemme du cours, montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est presque sûrement constante à partir d'un certain rang et converge donc presque sûrement lorsque n tend vers l'infini.

On a par définition de la suite (X_n)

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > 0) < +\infty,$$

de sorte que par le lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité un, les événements $|X_n| > 0$ ne se produisent qu'un nombre fini de fois. Autrement dit, pour $n \geq n_0$ assez grand (aléatoire), la suite S_n est stationnaire.

2. On note $\tau = \sup\{n \geq 1, X_n = 1\}$. Montrer que pour $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(\tau \leq k) = \prod_{\ell > k} (1 - \frac{1}{\ell^2})$. L'événement $\tau \leq k$ signifie exactement que pour $\ell > k$ on a $X_\ell = 0$ de sorte que par indépendance

$$\mathbb{P}(\tau \leq k) = \prod_{\ell > k} \left(1 - \frac{1}{\ell^2}\right).$$

3. En utilisant l'inégalité $\log(1 - x) \leq -x$ pour $0 < x < 1$, montrer que $\mathbb{P}(\tau \leq k) \leq e^{-\frac{1}{k+1}}$. Via l'inégalité de convexité, on déduit que

$$\log \mathbb{P}(\tau \leq k) \leq -\sum_{\ell > k} \frac{1}{\ell^2} \leq -\frac{1}{k+1},$$

où la dernière égalité est obtenue par comparaison somme/intégrale.

4. En déduire τ est fini presque sûrement mais que l'on a $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$. Dans la réponse à la question 1), on a vu qu'avec probabilité un, τ est fini. Par ailleurs, comme τ est une variable positive, on peut écrire

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k > 0} \mathbb{P}(\tau \geq k) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\tau > k) \geq \sum_{k \geq 0} (1 - e^{-1/(k+1)}).$$

Or pour k grand, on a l'équivalent $1 - e^{-1/(k+1)} \approx 1/(k+1)$ qui n'est pas sommable, d'où le résultat.

5. Déterminer l'espérance de T_n et donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \log(n).$$

6. Déterminer la variance de T_n et donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

De la même façon, comme les variables Y_i sont indépendantes, il vient

$$\text{var}(T_n) = \sum_{k=1}^n \text{var}(Y_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \approx \log(n).$$

7. Expliciter les fonctions caractéristiques φ_{Y_i} et en déduire l'expression de φ_{T_n} .

Un calcul direct donne que pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{Y_n}(t) = 1 + \frac{1}{n} (e^{it} - 1),$$

de sorte que par indépendance, il vient

$$\varphi_{T_n}(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} (e^{it} - 1)\right).$$

8. Question bonus : montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{T_n/\log(n)}(t)$ converge lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite.

D'après l'expression de φ_{T_n} , on déduit que pour $t \in \mathbb{R}$

$$\log \varphi_{T_n/\log(n)}(t) = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k} (e^{it/\log(n)} - 1)\right).$$

Un développement limité à l'ordre 1 dans l'exponentielle, puis le logarithme, donne alors

$$\log \varphi_{T_n/\log(n)}(t) = it + o(1).$$

Autrement dit, $T_n/\log(n)$ converge en loi, et donc en probabilité, vers la variable aléatoire constante égale à 1.

9. Question double bonus : on pose $Z_n := (T_n - \mathbb{E}[T_n])/\sqrt{\text{var}(T_n)}$. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{Z_n}(t)$ converge lorsque n tend vers l'infini, vers une limite que l'on explicitera.

On raisonne comme dans la question précédente en poussant le développement limité à l'ordre 2. En utilisant les expressions des moyenne et variance, il vient alors

$$\log \varphi_{Z_n}(t) = -\frac{t^2}{2} + o(1),$$

de sorte que Z_n converge en loi vers une loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.